

Gestione Attiva e Passiva: vantaggi, rischi e opportunità

Massimiliano Marzo

Dipartimento di Scienze Aziendali
Università di Bologna

23 ottobre 2025

- Gestione attiva vs. gestione passiva
- Gli strumenti principali per la gestione passiva o indicizzata: ETF.
- Le varie strategie di replica: fisica e/o sintetica
- Rischio/Rendimento degli ETF: meccanismi di price discovery
- Cenni su gestione di portafoglio ed ETF
- Conclusioni

Evoluzione gestione passiva

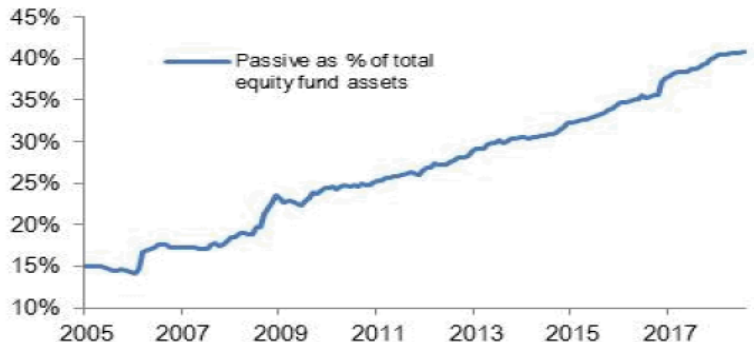


Figura: Evoluzione della raccolta gestione passiva nel tempo, dati US. Fonte: JPMorgan Report

Raccolta cumulata fondi attivi e passivi

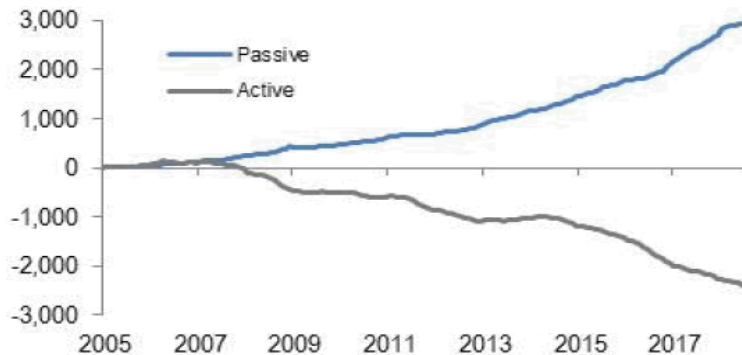
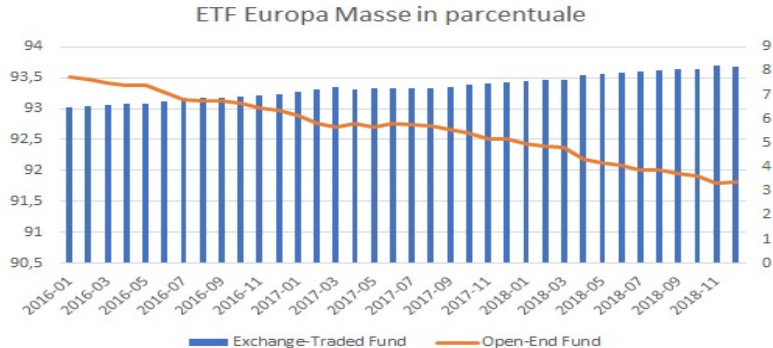
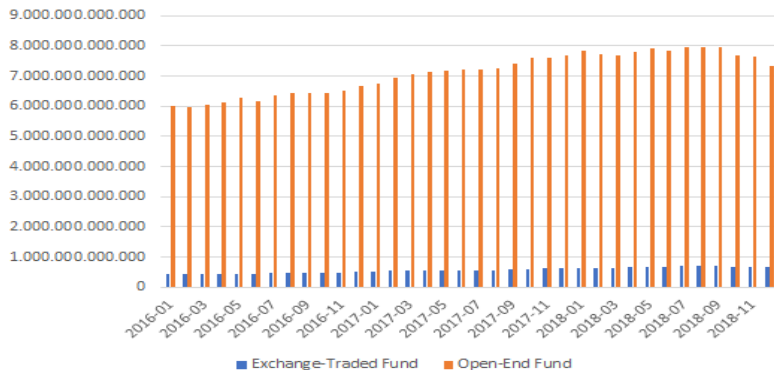


Figura: Raccolta cumulata fondi attivi e passivi, dati US. Fonte: JPMorgan Report

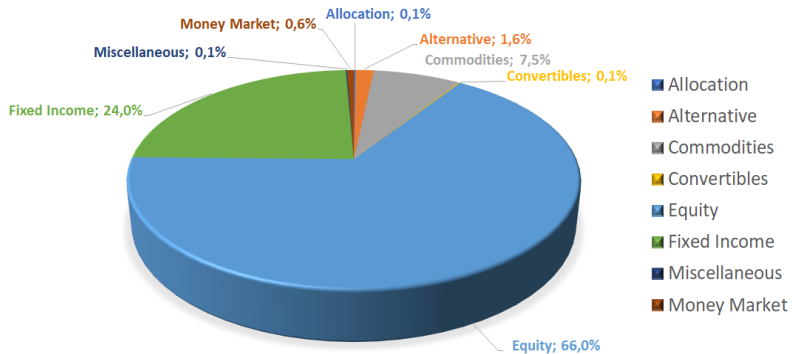
Fondi ed ETF in Europa 1



Fondi ed ETF in Europa 2



Fondi ed ETF in Europa 3



Gestione Passiva vs Gestione Attiva

- Gestione Passiva: attività di gestione di titoli e strumenti finanziari con l'obiettivo di replicare l'andamento di un benchmark o di un indice. La gestione non deve necessariamente prevedere l'utilizzo esatto del medesimo numero o tipologia di titoli, ma la logica è quella di replicare il rendimento di un dato benchmark o indice.
- Gestione attiva: attività di gestione orientata alla ricerca del massimo rendimento (con controllo del rischio) attraverso una tipologia di strategie/strumenti di genere più vario. In questo caso l'obiettivo primario è esattamente quello di battere il benchmark.
- Definizioni molto labili.

Possiamo distinguere due modalità di esecuzione della gestione passiva a seconda della diversa modalità di acquisizione dell'esposizione:

- Esposizione basata esclusivamente su indici: la strategia riflette la performance di un'asset class utilizzando un indice di mercato. Tale approccio rappresenta la maggioranza delle strategie adottate da ETF e fondi passivi.
- Esposizione non necessariamente basata su di un indice. La gestione è ottimizzata in funzione di esigenze fiscali o di altro genere, ma non segue un indice di mercato.

Strumenti di gestione passiva:

- Fondi passivi
- ETF.

Nello studio della gestione passiva ci concentreremo maggiormente sugli ETF.

ETF Caratteristiche generali

- ETF sono scambiati intra-day e hanno un NAV intra-day
- i Fondi hanno un NAV solo a fine giornata.

Gli ETF sono caratterizzati da due segmenti di mercato:

- Mercato Primario: mercato sul quale sono scambiati i titoli sui quali investe l'ETF.
- Mercato Secondario: mercato sul quale è scambiato l'ETF stesso.

Spesso è riscontrabile una differenza tra il NAV dell'ETF e il suo prezzo: situazione che origina un'arbitraggio tra il paniere di titoli sul mercato e l'ETF stesso.

ETF: i vantaggi

- NAV intra-day.
- Possibilità di generare esposizione a diverse asset class in modo semplice e diretto, con un buon grado di liquidità.
- possibilità di costruire titoli derivati sugli ETF in modo da permettere agli investitori di costruire strategie in modo da migliorare la propria esposizione al rischio. Gli ETF possono essere venduti short, prestati e acquistati al margine in modo da generare leva sull'esposizione. Questa caratteristica è molto importante per la gestione dei fondi.
- Gli ETF sono caratterizzati da management fee generalmente più bassi rispetto ai fondi in quanto i costi di gestione sono sopportati principalmente dai broker incaricati di effettuare le operazioni (Authorized Participants). Gli ETF, infatti NON interagiscono direttamente con il mercato.

ETF: differenze fondamentali con i fondi

- Il Fondo Aperto interagisce direttamente con il mercato e con i suoi investitori. A fronte di sottoscrizioni o riscatti, il fondo emette o ritira quote.
- Gli ETF non interagiscono con il mercato: a fronte di sottoscrizioni o riscatti, gli ETF possono avvantaggiarsi di scambi dei titoli sottostanti a replica fisica (in kind), o sintetica, come descritto in seguito.
- Il prezzo dell'ETF può divergere dal NAV: ciò genera una serie di arbitraggi. L'agente con il quale l'ETF interagisce è definito Authorized Participant.

Come funziona il fondo



- 1 Il cliente conferisce cash al fondo
- 2 Il fondo va su mercato e conferisce cash
- 3 Il fondo acquista titoli sul mercato.
- 4 Il fondo vende quote al cliente

- In un fondo aperto la liquidità è disponibile solo alla fine della giornata, nel momento in cui si calcola il NAV.
- Nell'ETF la liquidità è presente anche durante il giorno.
- Il meccanismo di creazione-redemption messo in opera da AP è necessario al fine di tenere il prezzo dell'ETF il più possibile vicino al valore dei titoli presenti in portafoglio.
- Le transazioni sul mercato secondario non conducono necessariamente a transazione sui titoli sottostanti.
- Il mercato secondario è un multiplo del volume di creazione/redemption activity.
- Chi è l'AP ? Sono fornitori di liquidità che interagiscono direttamente con l'emittente dell'ETF. Hanno il ruolo di market makers nella gestione dell'ETF e dei titoli sottostanti.

Meccanismo di Arbitraggio

AP svolge anche il ruolo di designated market maker e hanno diritti esclusivi di creazione o redemption dei titoli sottostanti.

$$\pi_t = p_t - n_t \quad (1)$$

dove p_t è il prezzo dell'ETF e n_t è il NAV. Consideriamo alcuni casi:

1 $\pi_t > 0$:

- ▶ AP vende ETF e acquista il paniere di titoli sottostante.
- ▶ Consegna i titoli all'ETF issuer.
- ▶ L'ETF issuer crea nuovi ETF e li riconsegna ad AP, con i quali chiude la posizione iniziale (in vendita)
- ▶ attraverso questo meccanismo, il prezzo scende (per via della vendita iniziale) e il valore del NAV sale, spinto dall'acquisto dei titoli.

Il meccanismo di arbitraggio 2

2 $\pi_t < 0$:

- ▶ AP compra ETF e vende il paniere di titoli sottostante.
- ▶ Consegna ETF all'ETF issuer, in cambio dei titoli sottostanti, per chiudere la posizione iniziale.
- ▶ attraverso questo meccanismo, il prezzo sale (per via dell'acquisto) e il valore del NAV scende, spinto dall'acquisto dei titoli.

Elemento cruciale: è dato da transazione in kind tra titoli sottostanti ed ETF. Non c'è uno scambio di cash.

L'arbitraggio permette di ottenere liquidità che si controbilanciano da un lato all'altro del mercato.

E' anche evidente che deviazioni del prezzo dal NAV non rappresenta necessariamente una possibilità di arbitraggio.

- Ogni 15 secondi circa viene disseminato un IIV (Intraday Indicative Value): esso è basato sui trades più recenti, ma non necessariamente basato sulla midpoint quote.
- IIV non è necessariamente attendibile, in quanto non include alcuni prezzi e, nel caso del fixed income, non comprende gli accruals.
- IIV non è utilizzabile per arbitraggio, anche perchè possono esserci difficoltà nella riconciliazione dei valori.

Sulle In kind transactions

- Gli scambi in kind (tra titoli sottostanti e quote ETF) tra AP ed ETF manager permette di eludere il tema della tassa su capital gain: a fronte di guadagni e/o perdite è possibile conferire o meno titoli.
- I fondi hanno obbligo di comprare e/o vendere titoli come conseguenza di sottoscrizioni e/o riscatti dei clienti: ciò influisce sul NAV e quindi ha conseguenza sugli aspetti fiscali.
- Le transazioni sul mercato secondario degli ETF non implicano necessariamente una creazione/distruzione di quote di ETF, dal momento che si possono scambiare quote di ETF per il basket di titoli: tali transazioni sono come degli swap e non sono tassabili per l'investitore.

Gli ETF sono ricompresi in una macro-categoria definita come ETP-Exchange Rate Product. Essi ricomprendono:

- ETF: essi rappresentano circa il 92.5 per cento del totale degli ETP scambiato. Essi detengono un portafoglio fisico di titoli che si avvicina (non è perfettamente identico) al paniere assunto come elemento assunto come tracking. L'obiettivo dell'investitore in questi titoli consiste nell'ottenere un'esposizione 1 a 1 con quel determinato indice.
- ETC: sono strumenti che investono in commodities sia in termini fisici che in futures.
- ETN - Exchange Traded Notes. Sono strumenti unsecured, non collateralized, di debito che assumono esposizione rispetto al rischio di credito di un'emittente.
- ETI leverage ETF. Strumenti che permettono un mix di esposizione fisica e/o sintetica rispetto a specifiche asset class attraverso derivati.

Replica Fisica e Replica sintetica

Gli ETF possono prevedere un meccanismo di replica dell'indice target definiti o a replica fisica o replica sintetica

- **Replica Fisica:** l'ETF investe o nella totalità dei titoli che compongono l'indice target o in una larga parte di essi. Quindi l'ETF detiene fisicamente i titoli (in tutto o in parte) che compongono l'indice target.
- **Replica Sintetica:** l'ETF cattura il rendimento dell'indice target attraverso l'utilizzo di swaps (asset swaps). In questo caso, l'ETF non investe direttamente nei titoli, ma replica il rendimento dell'indice target grazie al ruolo dei derivati.

La replica fisica può avvenire in diverse forme.

- **Replica Fisica Totale:** l'ETF investe o nella totalità dei titoli dell'indice o in una parte elevata. La proporzione di ogni titolo detenuta è molto simile alla proporzione che esso detiene nel paniere complessivo.
- **Replica Fisica a campione:** in questo caso l'ETF detiene un sottoinsieme dei titoli che formano il paniere. In questo caso il campione è scelto in modo da replicare il profilo rischio-rendimento dell'indice.
- **Replica Fisica con ottimizzazione:** in questo caso, la replica è effettuata attraverso un campione selezionato sulla base di un processo di minimizzazione del tracking error calcolato ex-ante. Tipicamente questo approccio è seguito quando la replica fisica del sottostante è impraticabile, data la sua ampiezza (perché magari troppo costosa).

- Il campionamento e l'ottimizzazione sono spesso utilizzate per ETF che replicano indice con grandi numeri di sottostanti e/o con titoli aventi scarsa liquidità. In questo caso detenere tutti i titoli può essere anche non economicamente sostenibile e, se illiquidi, anche non sempre in linea con l'impianto regolamentare.
- Campionamento e ottimizzazione vengono spesso utilizzati per ETF che replicano indici fixed income.
- Ovviamente è sempre possibile un tracking error *ex-post* rispetto all'indice che, a volte, può anche essere importante.
- Il vantaggio della replica fisica è la sua semplicità. Inoltre, ETF a replica fisica non hanno rischio di controparte, presente solo nel caso in cui vi siano in corso operazioni di prestito titoli.

- Per definizione, il prestito titoli consiste nel trasferimento temporaneo di un insieme di titoli da una parte all'altra, in cambio di un collaterale, generalmente formato da obbligazioni di primario standing, cash e anche azioni, con l'aggiunta di una commissione.
- Il collaterale a garanzia è generalmente maggiore del valore dei titoli prestati. Intermediari specializzati spesso prendono parte al processo.
- Il ricavo derivante da prestito titoli può controbilanciare la struttura dei costi e può migliorare la performance dell'ETF.

Commodity ETF: la replica

Gli ETF su Commodities europei possono essere classificati come:

- **Non-UCITS**: sono a replica fisica e offrono esposizione diretta nei confronti di metalli preziosi (oro, argento, palladio) che sono spesso immagazzinati fisicamente presso istituti specializzati, prevalentemente in Svizzera, dove la maggior parte degli ETF è domiciliata.
- **UCITS**: questi ETF replicano un indice attraverso un paniere di grandi dimensioni formato da futures su commodity. In questo caso la replica è basata su futures non su contratti fisici, data l'impossibilità di procedere (costi di immagazzinamento, liquidità, ecc.). In grandissima parte, questi indici sono a replica sintetica.

Replica Sintetica

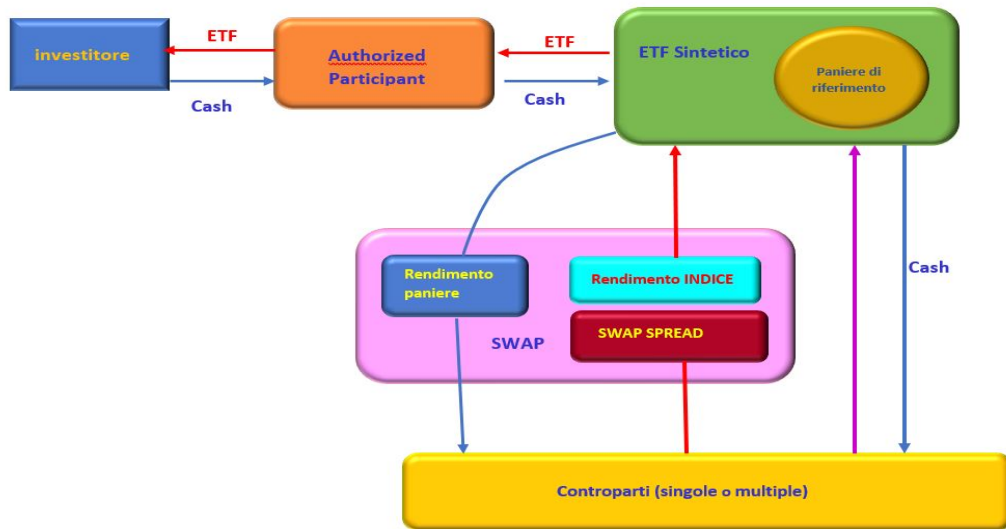
Gli ETF a replica sintetica replicano il rendimento dell'indice. Ciò è ottenuto attraverso uno swap, chiamato Total Return Swap.

Total Return SWAP: una determinata controparte si impegna a consegnare la performance di un indice in cambio di uno spread variabile, pagato dall'ETF.

La replica sintetica può avvenire in due modalità:

- **Unfunded:** Il paniere di titoli di riferimento adottato per la replica dell'indice può contenere titoli che NON sono parte dell'indice oggetto di replica. Pertanto, se la controparte coinvolta nello swap fallisce, gli investitori non hanno più esposizione sull'indice.
- **Fully Funded:** per la mitigazione del rischio una o più controparti coinvolte nello swap, pongono un capitale a garanzia dell'operazione presso un depositario. In caso di fallimento della controparte, la banca depositaria trasferisce gli asset posti a garanzia direttamente in favore dell'ETF. Il collaterale è a nome della controparte dello swap ma è in favore dell'ETF che, però, non ha accesso diretto ai titoli che lo compongono, in assenza di un evento di default in capo alla controparte.

Replica Sintetica: Unfunded

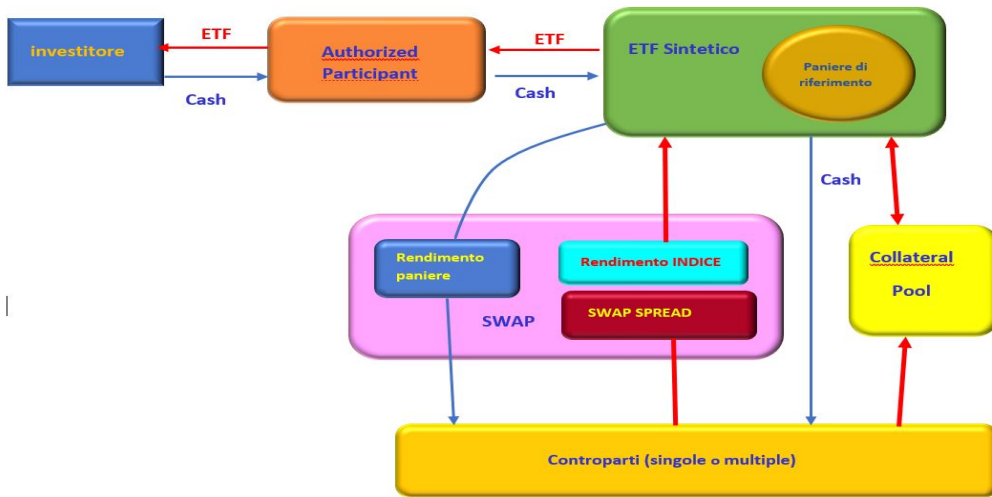


- L'ETF utilizza il denaro degli investitori per acquistare un paniere di titoli da una o più controparti, detenuto in conti segregati dell'Asset Manager o delle controparti dello swap.
- In cambio la controparte dello swap paga all'ETF la performance dell'indice, in cambio della quale l'ETF corrisponde il rendimento del paniere di riferimento.
- Il paniere può contenere titoli non necessariamente associati all'indice: in caso di fallimento di una controparte si perde l'esposizione rispetto all'indice.
- Rispetto all'ETF a replica fisica, l'ETF sintetico è più esposto a rischio controparte, misurato dalla differenza tra NAV ETF e valore paniere di riferimento: questa differenza è chiamata *valuation gap* e non può essere maggiore del 10 per cento del NAV ETF.

Unfunded 2

- Il *mark to market* è effettuato su base giornaliera. Se l'esposizione alla controparte dello swap supera il 10 per cento del NAV, lo swap è soggetto a *reset*: le controparti trasferiscono titoli addizionali al paniere di riferimento. Possono esservi altri accordi che, non sono necessariamente pubblici.
- I titoli del paniere sono scelti e acquistati dalla controparte swap e possono avere un grado di liquidità diverso da quello dell'indice.
- Necessaria *due diligence* per verificare la qualità del paniere e il suo allineamento in termini di rischio/rendimento rispetto all'indice.
- Le differenze tra il paniere di riferimento e l'indice possono anche essere marcate, anche in considerazione del fatto che la composizione del paniere può variare consistentemente nel tempo.
- Differenze sostanziali in materia di rischio/rendimento devono essere gestite dalla controparte swap in maniera attiva, al fine di allineare il paniere e l'indice.

Replica Sintetica: Fully Funded



Fully Funded 1

- A differenza del caso Unfunded, qui si considera una garanzia collaterale posta in nome della controparte dello swap ma in favore dell'ETF, presso una o più banche depositarie.
- In caso di fallimento della controparte, la banca depositaria trasferisce il capitale di garanzia in favore dell'ETF.
- Tra gli aspetti di due diligence in questo caso vi è la necessità di verificare la composizione del capitale di garanzia.
- In base a normativa UCITS, il collaterale deve garantire adeguati requisiti di liquidità e di diversificazione e di assenza di correlazione con il paniere di replica.
- Il valore del collaterale spesso è pari o superiore a quello del paniere utilizzato per il TR Swap.
- La composizione del collaterale spesso differisce da quella dell'indice sottostante. In periodi di forte market stress, può essere molto complicato gestire il paniere collaterale.

Fully Funded 2

- Il collaterale può essere riscattato dal fondo in qualsiasi momento, senza il consenso della controparte swap. Inoltre, il collaterale non può essere oggetto di pegno o prestito titoli. La parte cash del collaterale deve essere investita in titoli privi di rischio.
- ETF Fully Funded hanno generalmente minore tracking error, se confrontati con quelli a replica fisica, soprattutto per quanto riguarda l'esposizione e mercati poco liquidi o mercati emergenti. Ciò è perché gli ETF usano spesso tecniche di campionamento o ottimizzazione.
- La differenza di rendimento tra ETF e indice è essenzialmente dovuta allo swap spread e ai costi di gestione della struttura. Lo swap spread può presentare un flusso tale da più che compensare i costi della struttura e aggiungere redditività all'ETF.
- E' importante conoscere i dettagli dello swap spread e della composizione del collaterale per inquadrare bene la tipologia di strumento.
- Preferibilità a strumenti più trasparenti.

La valutazione degli ETF

La discrepanza tra NAV e prezzo dell'ETF può chiudersi all'interno di una sessione di trading, anche in relazione all'andamento delle quotazioni di mercato.

In generale, è comunque possibile identificare il valore di quota dell'ETF nel seguente modo:

$$E(v_t) = \sum_{i=1}^N w_i m_{i,t} + \left(\frac{CA_t}{M_t} \right) \quad (2)$$

dove: w_i indica la quota percentuale del titolo i -esimo; $m_{i,t}$ è la midpoint quote, ovvero il valore stimato del titolo i -esimo, al tempo t ; CA_t è la frazione di cash in eccesso di passività; M è il numero totale dei titoli ETF in circolazione.

L'equazione (2) esprime il metodo di calcolo del NAV dell'ETF.

Ovviamente, il valore dipende molto da $m_{i,t}$: se al posto della mid-point quote scambiata sul mercato, si sostituisce il titolo quotato, si ottiene il NAV di fine giornata.

La microstruttura degli ETF

Alcune domande fondamentali:

- Quale tipo di dinamica prezzo-liquidità è possibile identificare per gli ETF ?
- Discrepanze tra prezzo e NAV da dove possono originarsi ?

Per rispondere a tali domande, consideriamo un semplice modello.

Sia v_t il valore atteso dell'ETF, definito:

$$v_t = E_{t-1}p_t \quad (3)$$

dove p_t è il prezzo atteso.

Sia n_t il NAV al tempo t e il rendimento r_t , definito in termini logaritmici, come differenza tra i prezzi attesi:

$$r_t = v_t - v_{t-1} \quad (4)$$

La dinamica del prezzo di un ETF

Richiamo la definizione di valore atteso del prezzo di un ETF: $v_t = E_{t-1}p_t$, ciò significa che il valore v_t oscilla attorno ad un prezzo p_t a meno di uno shock transitorio di liquidità definito come u_t :

$$v_t = p_t + u_t \quad (5)$$

In modo molto semplice, possiamo evidenziare come u_t indica la liquidity pressure sul titolo. Assumo infatti che il rendimento r_t ha media μ e varianza σ^2 .

Chiediamoci ora: come evolve il NAV ? Da cosa dipende la dinamica del NAV ?

Ipotizziamo che il NAV n_t evolva secondo il seguente processo:

$$n_t = (1 - \phi)v_t + \phi n_{t-1} + z_t \quad (6)$$

La dinamica del prezzo di un ETF

Richiamo l'evoluzione del NAV:

$$n_t = (1 - \phi)v_t + \phi n_{t-1} + z_t \quad (7)$$

In base alla (7), il NAV è costruito come una media ponderata tra valore oggi e valore di ieri (n_{t-1}). Il coefficiente ϕ indica la persistenza del valore del NAV da un periodo all'altro ed è assunto essere: $0 \leq \phi \leq 1$.

Il termine z_t indica un termine di errore che riflette una variazione relativa alla liquidità del mercato ETF o a discrepanze nel calcolo del NAV: z_t ha media zero e varianza $\sigma_z^2 > 0$.

La dinamica del prezzo di un ETF 2

Richiamo l'evoluzione del NAV:

$$n_t = (1 - \phi)v_t + \phi n_{t-1} + z_t \quad (8)$$

In base alla (8) possiamo distinguere diversi casi:

- 1 $\phi = 0$: in questo caso, c'è perfetta coincidenza tra NAV e valore atteso del fondo, $n_t = v_t$. In questo caso, ogni premio o sconto dal NAV identifica solo shocks transitori di liquidità dovuti a frizioni di mercato. Fondo solo
- 2 $\phi > 0$: c'è una maggiore persistenza del NAV. Esempio tipico è dato da mercati di dealer con titoli illiquidi: in questo caso il NAV non riflette la reale situazione del mercato. In particolare, se $\phi < 0$ è un caso di overreaction: è un eccesso di informazione che viene da v_t su n_t .
- 3 $\phi \gg 0$, elevato e positivo: in questo caso l'ETF è sottoposto a elevati shock che sono relativamente persistenti.

Decomposizione del premio

Ricordiamo la definizione di premio:

$$\pi_t = p_t - n_t \quad (9)$$

Ricordiamo che il prezzo è dato da: $p_t = v_t + u_t$, quindi il premio è dato:

$$\pi_t = v_t + u_t - n_t \quad (10)$$

In equilibrio il premio deve essere zero. Esso è diverso da zero se e solo se $v_t + u_t \neq n_t$

Decomposizione del premio 2

E' possibile dimostrare che il premio π_t dipende da tre fattori fondamentali:

- un termine che evidenzia l'attività di price discovery, dato da $\frac{\phi}{1-\phi L} r_t$.
- shock transitori di liquidità (una media pesata), dato da: $\frac{\epsilon_t}{1-\phi L}$.
- una media pesata del noise relativi al NAV (elementi microstrutturali relativi al NAV), dato da $\frac{z_t}{1-\phi L}$.

Tali effetti sono molto importanti a seconda del livello del parametro ϕ : il livello di persistenza negli shock passati influenza l'andamento del premio oggi.

Inefficienze di mercato nel passato impattano sull'ampiezza del premio ad oggi: in sostanza, se il mercato subisce shock di liquidità, questo impatta in modo persistente sul premio (e sugli arbitraggi), più elevato è il coefficiente ϕ

Impatti sulla volatilità

Ricordiamo l'assunzione secondo cui il rendimento dell'ETF (daily change) è definito da:

$r_t = v_t - v_{t-1}$. Ipotizziamo che il rendimento abbia media μ e varianza σ_r^2 .

Concettualmente: il rendimento indica la variazione del prezzo dell'ETF da un periodo all'altro.

Consideriamo anche il rendimento del NAV: $r_t^N = n_t - n_{t-1}$.

Ignoriamo la presenza di noise strutturali sul NAV, pongo $z_t = 0$.

Definisco con σ_N^2 , la varianza del rendimento del NAV. E' possibile dimostrare che:

$$\sigma_N^2 = \frac{(1 - \phi)}{1 + \phi} \sigma_r^2 \quad (11)$$

La varianza del NAV è sempre inferiore a quella del prezzo

Impatti sulla volatilità 2

Ricordo:

$$\sigma_N^2 = \frac{(1 - \phi)}{1 + \phi} \sigma_r^2 \quad (12)$$

Siccome $\frac{(1-\phi)}{1+\phi} < 1$, è evidente che la volatilità del rendimento del NAV è sempre inferiore al rendimento del prezzo del titolo.

Altra domanda: che relazione esiste tra la volatilità del premio e quella dei titoli sottostanti ?

Il punto delicato è: sotto quali condizioni la volatilità si trasferisce ai titoli sottostanti ? Per rispondere a questa domanda, è sufficiente mostrare uno dei risultati più importanti:

$$\sigma_{\pi}^2 = \frac{\phi^2}{1 - \phi^2} \sigma_r^2 + \sigma_u^2 \quad (13)$$

dove σ_r^2 è la varianza del rendimento atteso ed indica la price discovery mechanism.

Il termine σ_{π}^2 indica la metrica del mispricing, dal momento che rappresenta la volatilità del premio.

Dalla formula in (13), si evince chiaramente che se ϕ è sufficientemente elevato, la volatilità del premio si trasmette certamente ai titoli sottostanti. Eventuali problemi di mispricing a livello di singolo ETF si trasmettono a tutti i titoli che formano il sottostante.

- **Difetti di aggiustamento e convergenza amplificano la volatilità dell'ETF e, tramite il meccanismo di arbitraggio, si riverberano nella volatilità dei titoli sottostanti.**
- Problemi 'microstrutturali' di trading o frizioni di trading insite all'operatività dell'ETF rischiano di trasferirsi nella dinamica dei prezzi dei titoli.
- Pertanto: **ETF liquidi sono sempre preferibili.** In questo caso tutti gli errori microstrutturali sono zero.

Ogni investitore ha accesso al mercato ETF attraverso due canali:

- Mercato Primario: attraverso la creazione e distruzione di quote di ETF, tramite il ruolo dell'AP, in interazione con il mercato dei titoli sottostanti.
- Mercato Secondario: dove vengono quotati direttamente gli ETF. Ciò è possibile su diversi mercati (Dark Pools). Sul mercato secondario la liquidità è garantita dai market makers.

Liquidità:

- Sul Primario: si scambiano ETF con titoli componenti, attraverso il ruolo di creazione e ritiro delle componenti. La liquidità sul primario è sempre equivalente alla liquidità del paniere sottostante. Il legame tra primario e secondario è garantito dal ruolo dell'AP.
- Sul Secondario: vedi dopo

La liquidità sul mercato secondario

La liquidità sul secondario può essere:

- visibile: la profondità di mercato (market depth). E' definita dalla quantità in acquisto o in vendita per ogni dato livello di prezzo.
- non visibile: quando gli ordini sono immessi attraverso procedure particolari (ordini 'iceberg'), dove non sempre agevole identificare quantità e prezzi.

Se l'AP esce dal mercato, vi possono essere ripercussioni sulla liquidità complessiva dell'ETF. La liquidità sul secondario è in genere dalle 2 alle 4 volte superiore a quella esistente sul mercato primario.

Rischi e profondità di mercato

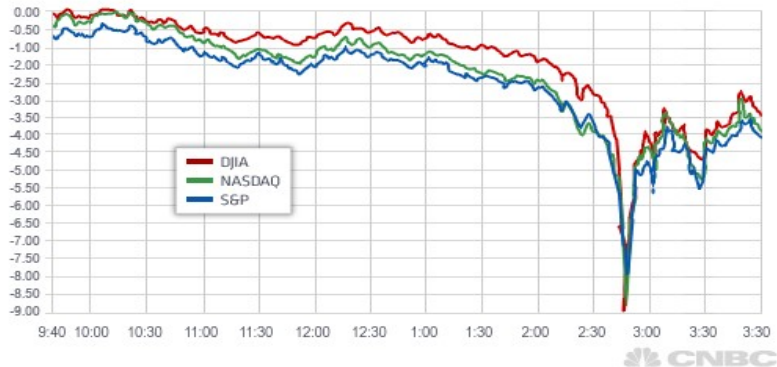


Figura: Evoluzione della rischiosità e della profondità di mercato, dati US. Fonte: JPMorgan Report

Flash Crash

U.S. Markets on May 6, 2010

Percent Change, Time Shown in EST



I rischi della gestione passiva 2

- Ancora sul Flash Crash: calo improvviso liquidità in un segmento del mercato pone in tensione i prezzi e si ripercuote su tutto il mercato nel suo complesso. Errori materiali.
- Ruolo della tecnologia e del trading algoritmico: accentuazione del meccanismo di trasmissione di questi shock che nascono in segmenti particolari del mercato.
- Attività di prestito titoli tra ETF e fondi della stessa famiglia genera sussidi incrociati tra fondi ed ETF. Costi impliciti non evidenti.
- Rischio di regolazione (settlement failure)

Strategie di gestione attiva sono ricomprese in due macro-categorie:

- Deviazioni (euristiche o guidate da modelli specifici) dai pesi relativi alla capitalizzazione di mercato, sulla base di considerazioni relative alla diversificazione del rischio, liquidità o altro.
- Strategie volte alla ricerca di alpha, aventi l'obiettivo di superare un determinato ottenuto sulla base delle view sui fondamentali, o strategie quantitative.

Essenzialmente la costruzione di una gestione attiva combina elementi di natura qualitativa e quantitativa orientati o alla realizzazione di rendimento nel breve termine e/o nel lungo termine.

Tecniche quantitative

Alcuni esempi di tecniche quantitative largamente impiegate:

- Ottimizzazione di portafoglio secondo varie tecniche: CAPM, metodi bayesiani, resampling, Risk Parity (equal risk contribution). Sono tecniche volte all'ottimizzazione dei pesi con i quali i titoli entrano in portafoglio.
- Tecniche di arbitraggio statistico (statistical arbitrage) per sfruttare la presenza di arbitraggi presenti tra i vari titoli.
- Creazione di strategie di monitoraggio e analisi del trading book per lo sfruttamento opportunistico delle fasi di mercato.
- Analisi del meccanismo di trasmissione della volatilità tra asset classes per la definizione di strategie ottimali di trading.

Il mondo delle strategie quantitative si evolve in continuazione alla ricerca di 'alpha'.

Smart Beta, Modelli a Fattore

- Modelli in grado di ridurre ed anche eliminare il rischio di mercato o il rischio associato a fattori specifici.
- Modello CAPM: modello a un fattore. Elimino il rischio idiosincratco, ma devo gestire il rischio di mercato.
- Con modelli a fattore riesco ad eliminare o gestire il rischio di mercato o verso specifiche esposizioni.
- Modelli utili per gestione attiva, ma anche passiva, in quanto in grado di creare un matching quasi perfetto con il benchmark.

La generazione del rendimento in gestione attiva



Esempio di Fattori

Fattori	Asset class	Risk Drivers	Behavioral Drivers
Size	Azionario: differenza tra rendimento di small-large cap	Elevati rischi e costi richiedono elevati rendimenti, scarsa liquidità	Ang (2014): size effect non si rinviene più
Vale / Growth	Azioni/Bonds: book/price, price/earnings	Azioni Value sono più sensibili a shock macro in recessione, per leverage	Investitori tendono a preferire growth, eccesso di reazione rispetto a news negative
Momentum	Rendimento Momentum: definito utilizzando rend ultimi 12 mesi, senza l'ultimo mese per escludere reversal	Imprese ad elevata crescita più rischiose	Eccesso di fiducia e self-attribution bias
Profittabilità/Qualità	Azioni: ROE, Assets, stabilità dei cash flows, mancanza di leva	Imprese con elevato ROE hanno sovraperformato	Investitori non riconoscono rischi specifici.
Liquidità	Titoli con bassa liquidità: eccessiva sensibilità a mutamenti nella liquidità di mercato	Titoli i cui rendimenti attesi sono più bassi implicano premio al rischio	Investitori sottovalutano l'importanza della liquidità
Volatilità	Portafogli con volatilità bassa sovraperformano	Investitori tendono a pagare troppo titoli con elevato beta	Overpricing

Il CAPM è anche noto come modello a fattore unico, dal momento che descrive il rendimento di un titolo in funzione di un solo fattore: il rischio di mercato, dato da $\tilde{R}_M$.

Quali altri fattori possiamo considerare ?

- **Variabili macroeconomiche:** pendenza della curva dei rendimenti a scadenza. Indice di inflazione attesa. Variazioni della produttività.
- **Caratteristiche dell'impresa:** grandezza, informazioni sul settore industriale di appartenenza e altri aspetti.

L'analisi dei fattori permette di identificare una procedura statistica adatta ad identificare un insieme di elementi comune in grado di muovere i diversi titoli.

Considero un titolo i , insieme ad un generico numero di fattori. Immaginiamo di utilizzare K fattori. Il rendimento del titolo, può essere rappresentato da:

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_{i1}\tilde{F}_1 + \beta_{i2}\tilde{F}_2 + \dots + \beta_{iK}\tilde{F}_K + \varepsilon_i \quad (14)$$

dove β_{iz} rappresenta la reattività del titolo i -esimo rispetto al fattore z -esimo. Posso decomporre la varianza nella somma dei $K + 1$ termini:

$$\text{var}(\tilde{R}_i) = \beta_{i1}^2 \text{var}(\tilde{F}_1) + \beta_{i2}^2 \text{var}(\tilde{F}_2) + \dots + \beta_{iK}^2 \text{var}(\tilde{F}_K) + \text{var}(\varepsilon_i) \quad (15)$$

In base alla (15), la varianza di ogni titolo è decomposta nella somma delle varianze dei primi K fattori, più la varianza specifica idiosincratICA data da $\text{var}(\varepsilon_i)$.

Esempio di modello

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{i,mkt}(R_{m,t} - R_f) + \beta_{i,smb}SMB_t + \beta_{i,hml}HML_t + \beta_{i,umd}UMD_t + \epsilon_t \quad (16)$$

dove:

- $R_{m,t}$: Market, rendimento indice di mercato.
- SMB_t , o size small cap meno big stocks
- HML_t o value, (high minus low), performance di value stock relativamente a growth.
- UMD_t , o Momentum: performance di 'winners' meno 'losers', lungo l'arco degli ultimi 12 mesi.

Conclusioni 1

- Crescita importante mercato ETF. Gestione Smart.
- Tecnologia: trading algoritmico, robot advisory. Tutti fattori che tendono naturalmente a privilegiare ETF a fondi.
- Vantaggi uso ETF: possibilità di esposizione ad asset class in modo semplice e a costi bassi.
- Strumento molto importante da complementare con altri strumenti più tradizionali, come i fondi.
- La combinazione ETF-Fondi permette di catturare in modo virtuoso le varie fasi e caratteristiche del mercato.
- Attenta due diligence su ETF e Fondi sempre più necessaria.

I modelli di Portafoglio: Media-Varianza e CAPM

Introduzione

Massimiliano Marzo

Department of Management, University of Bologna

24 ottobre 2025

- Richiami di statistica di base: media, varianza, funzione di densità.
- Richiami funzione di utilità.
- Il modello media-varianza di base.
- Il Capital Asset Pricing Model (CAPM)
- I problemi del CAPM
- Procedure di resampling e normalizzazione.
- Modelli Bayesiani. Il modello Black-Littermann
- Risk Parity
- Cenni a CAPM intertemporale: l'equity premium puzzle.
- Valutazione del Risparmio Gestito.

Richiami di statistica: media e valore atteso

- Dato il rendimento di una data attività finanziaria, R . Consideriamo tale rendimento come variabile casuale definita come $\tilde{R}$ che può assumere valori all'interno di un determinato intervallo.
- Consideriamo ora una collezione di valori che tale variabile può assumere: $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \dots, \tilde{R}_T$, dove T è il numero complessivo di valori che tale variabile assume.

Definiamo la media μ di tali valori come:

$$\mu = \frac{1}{T} \left(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_3 + \dots + \tilde{R}_T \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \tilde{R}_k \quad (1)$$

La media è anche definita (secondo l'approccio frequentista) come valore atteso. Per cui:

$$\mu = E(\tilde{R}) \quad (2)$$

Richiami di statistica: varianza

La varianza del rendimento $\tilde{R}$ è definita da:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\tilde{R}_k - \mu)^2 \quad (3)$$

La varianza indica una misura dello scarto quadratico dalla media ed è anche definita come momento secondo o momento centrale di ordine secondo, indicata da m_2 . Ovviamente:

$$\sigma^2 = m_2$$

La radice quadrata della varianza indica la deviazione standard, che è generalmente assunta come indicatore della dispersione dalla media:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (4)$$

Una distribuzione statistica è però definita da quattro momenti. Oltre ai due citati dobbiamo anche considerare il momento terzo e quarto che assumono caratteristiche molto particolari.

Momento Terzo, skewness/asimmetria

Il momento centrale di ordine terzo di $\tilde{R}$ è definito dalla sommatoria degli scarti dalla media elevati per 3, diviso T :

$$m_3 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\tilde{R}_k - \mu)^3 \quad (5)$$

Il momento terzo è particolarmente utile per il calcolo del grado di simmetria di una distribuzione. L'indice di asimmetria è definito come:

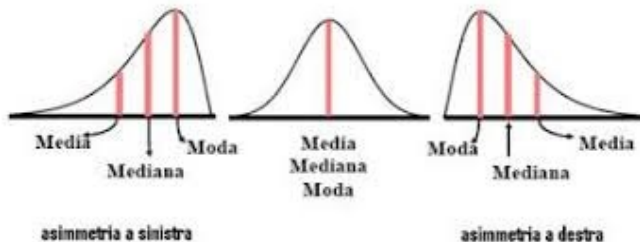
$$\gamma = \frac{m_3^2}{m_2^2 \sqrt{m_2}} = \frac{m_3^2}{m_2^{3/2}} \quad (6)$$

dove, chiaramente, m_2 indica il momento secondo e m_3 il momento terzo.

Momento Terzo, skewness/asimmetria 2

L'indice di asimmetria γ a seconda del segno (positivo o negativo) che assume, indica l'orientamento dell'asimmetria. In particolare:

- se $\gamma = 0$, la curva è simmetrica.
- se $\gamma > 0$, la curva ha asimmetria positiva (o asimmetria destra): $\text{media} > \text{mediana} > \text{moda}$.
- se $\gamma < 0$, la curva ha asimmetria negativa (o asimmetria sinistra): $\text{media} < \text{mediana} < \text{moda}$.



Momento Quarto, Curtosi

Il momento centrale di ordine quarto m_4 è definito da:

$$m_4 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\tilde{R}_k - \mu)^4 \quad (7)$$

Possiamo allora calcolare l'indice di Curtosi, k come segue:

$$k = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 \quad (8)$$

Nel caso di una variabile casuale normale, $k = 0$, dal momento che il rapporto $m_4/m_2^2 = 3$.
Pertanto:

- se $k > 0$ la distribuzione si definisce leptocurtica, ovvero pi ù appuntita di una normale.
- se $k < 0$ la distribuzione si definisce platicurtica, ovvero pi ù piatta di una normale.
- se $k < 0$ la curva è definita mesocurtica o normocurtica, ovvero piatta come una normale.

Considerazioni generali

- In generale, la distribuzione dei rendimenti delle più comuni asset class con frequenza giornaliera tende ad essere platicurtica ed asimmetrica.
- Ciò ha importanti implicazioni in materia di gestione del portafoglio e di risk management.
- Essenzialmente, la teoria di portafoglio rappresenta un tentativo di gestire forti anomalie nel dato statistico analizzato.
- Il risultato più sorprendente è forse che le difficoltà dei modelli di portafoglio sono essenzialmente il risultato di difficoltà nella gestione e nella comprensione delle anomalie dei dati.

Elementi di base: la funzione di utilità attesa

- Consideriamo la seguente funzione di utilità:

$$u(x_0, \dots, x_T) = \sum_{t=0}^T u(x_t)$$

- Il consumo in uno stato del mondo non influenza il consumo in altri stati.
- La funzione di utilità è un indicatore di soddisfazione associato ad un determinato livello di consumo o di rendimento.
- Introduciamo il vincolo di bilancio. Suppongo che ogni agente possa investire in un titolo privo di rischio e in un insieme di N titoli rischiosi. Sia α_i la proporzione di ricchezza investita nell i -esimo titolo.
- Sia $\tilde{r}_i$ il rendimento del singolo titolo.
- Sia W_0 la ricchezza iniziale.
- $(W_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)$, ammontare investito nelle attività prive di rischio.

Elementi di base: la funzione di utilità attesa

- Il vincolo di bilancio è:

$$\widetilde{W} = \left(W_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) (1 + r_F) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 + \widetilde{r}_i)$$

- Recall:

$$\widetilde{W} = \left(W_0 - \sum_{i=1}^n w_i \right) (1 + r_F) + \sum_{i=1}^n w_i (1 + \widetilde{r}_i) = \quad (9)$$

$$= W_0 (1 + r_F) + \sum_{i=1}^n w_i (\widetilde{r}_i - r_F) \quad (10)$$

- Si noti che $\widetilde{r}_i$ è una variabile casuale e $\widetilde{W}$ indica la ricchezza totale.

Se sostituiamo il vincolo di bilancio nella funzione obiettivo e consideriamo la derivata rispetto α_i . Il risultato è dato da:

$$E \left[u' \left(\widetilde{W} \right) (\widetilde{r}_i - r_F) \right] = 0 \dots \text{for all } i \quad (11)$$

dalla (11) otteniamo che un individuo avverso al rischio con una funzione di utilità monotonicamente crescente, esprimerà una domanda positiva di attività rischiose se e solo se il rendimento di queste è superiore al tasso privo di rischio.

Con un premio al rischio positivo, la domanda di attività rischiose è positiva, altrimenti se il premio al rischio fosse negativo, la domanda di attività rischiose è negativa.

Asset rischiosi e avversione al rischio

- Domanda: qual' è il livello di remunerazione minima necessaria rispetto al titolo privo di rischio, per indurre l'investitore a detenere quote positive di asset rischiosi ?
- La risposta a questa domanda coinvolge alcune considerazioni riguardanti la struttura delle preferenze, ovvero l'attitudine rispetto al rischio da parte del singolo investitore.

Richiamiamo che per investire in titoli rischiosi l'intera ricchezza, deve essere soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$E [u' (W_0(1 + r_F) (\tilde{r} - r_F))] \geq 0 \quad (12)$$

dove abbiamo ipotizzato l'esistenza di un solo titolo rischioso.

Considerando un'espansione in serie di Taylor, attorno al termine $W_0(1 + r_F)$:

$$E [u' (W_0(1 + r_F) (\tilde{r} - r_F))] = u' (..) E (\tilde{r} - r_F) + u'' (..) W_0 E (\tilde{r} - r_F)^2 + \dots$$

Ponendo uguale a zero e risolvendo per $E (\tilde{r} - r_F)$, si ha:

Domanda per asset rischiosi

$$E(\tilde{r} - r_F) \geq R_A(.) W_0 E(\tilde{r} - r_F)^2$$

dove:

$$R_A(.) = -\frac{u''(..)}{u'(..)} \quad (13)$$

indica l'indice di Arrow-Pratt di avversione assoluta al rischio. Maggiore è il grado di avversione al rischio, più elevato sarà il livello di premio al rischio richiesto dall'agente rappresentativo per detenere quote addizionali di titoli rischiosi. L'indice misura la curvatura della funzione di utilità.

- Avversione al rischio crescente al crescere della ricchezza, implica che il titolo rischioso è un bene inferiore.
- Avversione al rischio costante implica che la domanda di titoli rischiosi è invariante rispetto alla ricchezza iniziale.
- Se l'avversione al rischio decresce rispetto alla ricchezza, il titolo rischioso è un bene normale.

Avversione al rischio relativa

- Basically:

$$\begin{aligned}\frac{dR_A}{dW_0} < 0 &\Rightarrow \frac{dw}{dW_0} > 0 \\ \frac{dR_A}{dW_0} \geq 0 &\Rightarrow \frac{dw}{dW_0} \leq 0 \text{ inferiore}\end{aligned}$$

- Una versione più accurata è l'indice di avversione al rischio relativa:

$$R_R(W) = R_A(W) W \quad (14)$$

- L'indice permette di valutare diversi tipi di impatto della ricchezza sulla domanda di asset rischiosi.

- Gli indici di avversione al rischio hanno un ruolo cruciale nella definizione della domanda di titoli. Dati due soggetti i and j , con la stessa ricchezza, se $R_A^i(x) \geq R_A^j(x)$, allora i è detta essere più avverso al rischio di j e i paga un premio al rischio più elevato.
- L'ammontare di domanda di titoli rischiosi dipende dal grado di avversione al rischio.
- Condizionato alla variazione nella ricchezza, ogni individuo può modificare la composizione della ricchezza allocata tra titoli rischiosi e titolo privo di rischio.
- In altri termini: la scelta tra investimento in titoli rischiosi e titolo non rischioso è indipendente dalla composizione del paniere di titoli rischiosi.
- Tale risultato emerge come conseguenza del Two Funds Separation Theorem di Cass e Stiglitz del 1977

Teorema di separazione

- Il teorema di separazione fissa le condizioni che devono essere soddisfatte per la sua applicabilità.
- Essenzialmente si tratta di condizioni sulla forma funzionale dell'utilità, che deve essere concava e crescente.
- Il teorema permette di mantenere inalterata la composizione dell'intero portafoglio e introduce il ruolo dell'avversione al rischio per modificare la composizione del mix tra titoli rischiosi.
- Portafogli ottimali differiscono soltanto per il livello di ricchezza iniziale che, influenzando sul grado di avversione al rischio, determina una diversa composizione tra titoli rischiosi e non.
- il portafoglio di titoli rischiosi può essere considerato come un indice.
- Modificando il grado di avversione al rischio si determina anche la domanda complessiva di titoli rischiosi.

Verso una teoria del portafoglio

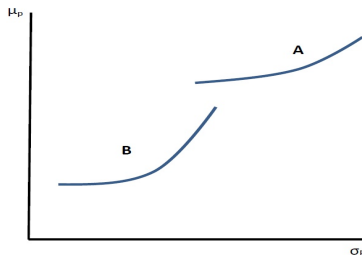
- La teoria di portafoglio ha come base l'utilizzo di una funzione di utilità quadratica, i cui argomenti sono la media e la varianza, del tipo:

$$U = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2 \quad (15)$$

- Ciò permette la rappresentazione delle preferenze nello spazio media-varianza che rappresenta lo schema di riferimento per l'analisi di portafoglio.
- L'utilizzo della funzione quadratica permette di semplificare l'analisi ai primi due momenti della distribuzione statistica.
- Un modo per rappresentare le preferenze è dato dalle curve di indifferenza: indicano le coordinate media/varianza ai quali è associato il medesimo livello di utilità.

Curve di indifferenza

A pendenza più ripida corrisponde un maggiore grado di avversione al rischio.



- Soggetto A: amante del rischio, è disponibile ad accettare una minore remunerazione per ogni unità di rischio.
- Soggetto B: Avverso al rischio, dal momento che desidera una maggiore remunerazione per unità di rischio.

- Il CAPM: modello a due titoli. Le sue caratteristiche ed estensioni.
- La Capital Market Line e la Security Market line.
- Cosa funziona e cosa non funziona nel CAPM
- Un approccio formale al CAPM
- Cosa funziona e non nel CAPM.
- Estimation bias.

Introduzione al CAPM

- Il modello CAPM ha avuto il merito di permettere una formalizzazione del problema di scelta di portafoglio.
- Il punto di partenza è rappresentato dal semplice modello di media-varianza. Il lavoro parte dai contributi originali di Sharpe (1964) e Lintner (1965).
- Partiamo da un'introduzione intuitiva basata sul modello a due titoli, per poi estendere il nostro approccio ad un caso generale, con una formalizzazione un pochino più accurata.
- In seguito proporremo estensioni al modello ed evidenzieremo i limiti e le strategie di miglioramento.

Introduzione al CAPM: Ipotesi

- Esiste un titolo privo di rischio il cui rendimento indica il tasso di interesse rispetto al quale gli investitori possono prendere a prestito e prestare denaro.
- Investitori hanno aspettative omogenee rispetto ai valori di ogni asset. Ovvero: assegnano eguale probabilità a diversi valori dei titoli riguardo a medie, varianze, covarianze.
- Investitori sono avversi al rischio
- Il mercato è perfettamente concorrenziale e non ci sono frizioni o tasse.

- L'ipotesi di aspettative omogenee implica che la frontiera efficiente è la stessa per tutti gli investitori: ciò è perché non esiste un investitore che possa assegnare probabilità diverse a valori diversi dei titoli degli assets.
- La presenza del titolo privo di rischio permette poi di individuare univocamente il portafoglio di mercato.
- Il concetto di avversione al rischio implica poi che l'investitore preferisce sempre il portafoglio con varianza minima, per ogni dato livello di rendimento medio.

Il concetto di diversificazione

Consideriamo il caso con due titoli. Assumiamo di avere due titoli rischiosi: 1 e 2. Ipotizziamo di combinarli insieme con un peso pari ad α :

$$\tilde{R}_p = \alpha \tilde{R}_2 + (1 - \alpha) \tilde{R}_1 \quad (16)$$

endequation

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_1) &= \mu_1; & E(\tilde{R}_2) &= \mu_2; & E(\tilde{R}_p) &= \mu_p; \\ \sigma_1^2 &= \text{Var}(\tilde{R}_1); & \sigma_2^2 &= \text{Var}(\tilde{R}_2); & \sigma_p^2 &= \text{Var}(\tilde{R}_p) \end{aligned}$$

Considerando il valore atteso, otteniamo i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \alpha \mu_2 + (1 - \alpha) \mu_1 = \\ &= \mu_1 + \alpha(\mu_2 - \mu_1) \end{aligned}$$

Ipotizzo che il titolo 1 sia meno rischioso del titolo 2: $\sigma_1 < \sigma_2$

Diversificazione

La varianza di portafoglio è data da:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \text{Var}(\alpha \tilde{R}_2 + (1 - \alpha) \tilde{R}_1) = \\ &= \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{12}\end{aligned}$$

con la covarianza definita da: $\sigma_{12} = \text{Cov}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$.

Per definizione $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$.

Da cui la varianza di portafoglio diventa:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (17)$$

Possiamo ora distinguere diversi casi, a seconda del valore assunto dal coefficiente di correlazione ρ_{12} :

- $\rho_{12} = 0$
- $\rho_{12} = 1$
- $\rho_{12} = -1$

Diversificazione: $\rho_{12} = 0., 1$

Caso con $\rho_{12} = 0.$

La varianza di portafoglio è

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 \quad (18)$$

Possiamo identificare ora il valore di α^* , tale per cui si ottenga un minimo valore per la varianza di portafoglio, semplicemente: $\partial \sigma_p^2 / \partial \alpha = 0$, da cui si ottiene ($2\alpha \sigma_2^2 - 2(1 - \alpha) \sigma_1^2 = 0$):

$$\alpha^* = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Dal momento che la derivata seconda è positiva: (ovvero: $\partial^2 \sigma_p^2 / \partial^2 \alpha = 0$), possiamo confermare che α^* è un minimo.

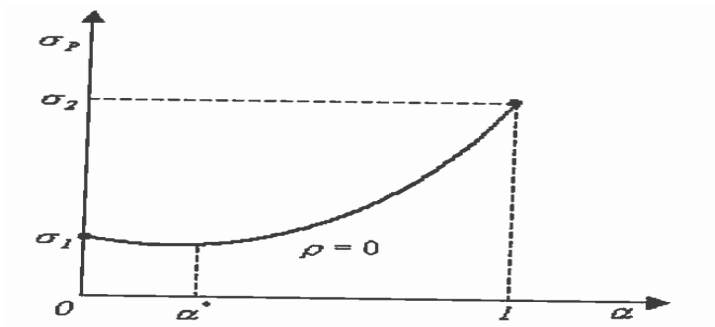
Possiamo ora rappresentare graficamente l'equazione (19)

Diversificazione: $\rho_{12} = 0$, 2

Caso con $\rho_{12} = 0$.

Varianza di portafoglio:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 \quad (19)$$



Diversificazione: $\rho_{12} = 0..$ Commenti

- Se scegliamo titoli con correlazione pari a zero, se l'investimento nel titolo più rischioso (il titolo 2) è pari ad α^* , minimizziamo il rischio di portafoglio, ma non lo annulliamo.
- Se aumentiamo $\alpha > \alpha^*$, otteniamo che il rischio di portafoglio aumenta, in modo non lineare: relazione convessa del rischio.
- Il messaggio comunque è che in corrispondenza del valore ottimale α^* , riusciamo ad ottenere una rischiosità di portafoglio che è inferiore al livello di rischio associato al titolo meno rischioso (il titolo 1).
- Questo è il beneficio di diversificazione, nel senso che combinando titoli aventi caratteristiche diverse in termini di correlazione, otteniamo miglioramenti molto consistenti in materia di gestione del rischio.

Diversificazione caso con $\rho_{12} = 1$

Caso con $\rho_{12} = 1$.

La varianza di portafoglio ora è:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2 \quad (20)$$

L'equazione (20) diventa:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= [\alpha\sigma_2 + (1 - \alpha)\sigma_1]^2 = \\ &= [\sigma_1 + \alpha(\sigma_2 - \sigma_1)]^2 \end{aligned}$$

Da cui prendendo la radice quadrata:

$$\sigma_p = \sigma_1 + \alpha(\sigma_2 - \sigma_1)$$

funzione lineare α , con pendenza $(\sigma_2 - \sigma_1)$. Intuitivamente: maggiore è la proporzione investita nell'asset più rischiose, maggiore è la varianza di portafoglio.

In questo caso, non ci sono effetti positivi derivanti dalla diversificazione.

Diversificazione: Caso con $\rho_{12} = -1$.

Caso con $\rho_{12} = -1$

In questo caso la varianza di portafoglio è:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 - 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2 \quad (21)$$

L'equazione (21) diventa:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= [\alpha\sigma_2 - (1 - \alpha)\sigma_1]^2 = \\ &= [\alpha(\sigma_2 + \sigma_1) - \sigma_1]^2 \end{aligned}$$

Considerando la radice quadrata:

$$\sigma_p = \alpha(\sigma_2 + \sigma_1) - \sigma_1 = \alpha(\sigma_2 + \sigma_1) - \sigma_1 \text{ if } \alpha(\sigma_2 + \sigma_1) - \sigma_1 > 0 \quad (22)$$

$$\sigma_p = \sigma_1 - \alpha(\sigma_2 + \sigma_1) \text{ if } \alpha(\sigma_2 + \sigma_1) - \sigma_1 < 0 \quad (23)$$

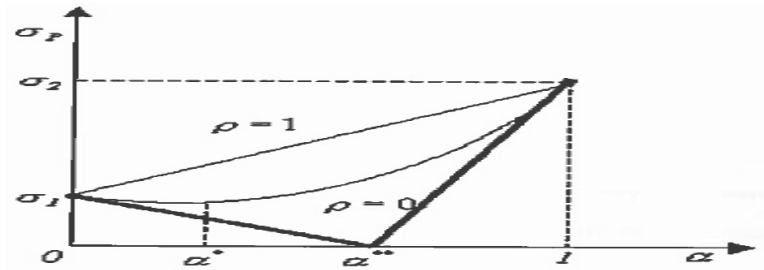
Otteniamo due relazioni lineari: la prima è crescente rispetto ad α la seconda decrescente.

Inoltre:

$$\sigma_p = 0 \Leftrightarrow \alpha^{**} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$$

Diversificazione

Con $\rho_{12} = -1$, possiamo completamente eliminare la volatilità di portafoglio, ponendo $\alpha = \alpha^{**}$.



Si vede molto bene che con $\rho_{12} = 1$, non si ha assolutamente alcun beneficio di diversificazione, dal momento che si ha una semplice relazione lineare tra α e il rischio di portafoglio.

Se includo titoli con correlazione negativa, posso ridurre notevolmente la varianza di portafoglio.

Nel piano media-varianza

Consideriamo ora di trasferire la cosa nello spazio (μ_p, σ_p) . Il rendimento di portafoglio:

$$\mu_p = \mu_1 + \alpha(\mu_2 - \mu_1) \quad (24)$$

Inoltre, con $\rho_{12} = 1$:

$$\sigma_p = \sigma_1 + \alpha(\sigma_2 - \sigma_1) \quad (25)$$

Risolvo la (25) per α :

$$\alpha = \frac{\sigma_p - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \quad (26)$$

Sostituisco la (26) nella (24) e ottengo una relazione lineare: μ_p and σ_p valida se $\rho_{12} = 1$:

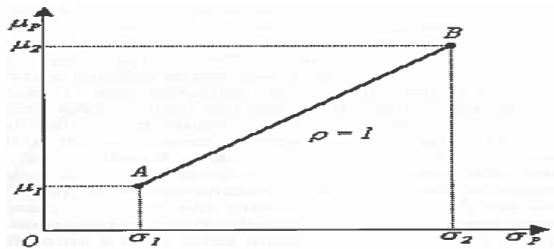
$$\mu_p = \mu_1 + \left(\frac{\sigma_p - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \right) (\mu_2 - \mu_1) \quad (27)$$

Che è l'equazione di una retta passante per due punti A e B con coordinate: $A = (\sigma_1, \mu_1)$,
 $B = (\sigma_2, \mu_2)$

Media-Varianza. Caso $\rho_{12} = 1$

Richiamo l'equazione:

$$\mu_p = \mu_1 + \left(\frac{\sigma_p - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \right) (\mu_2 - \mu_1)$$



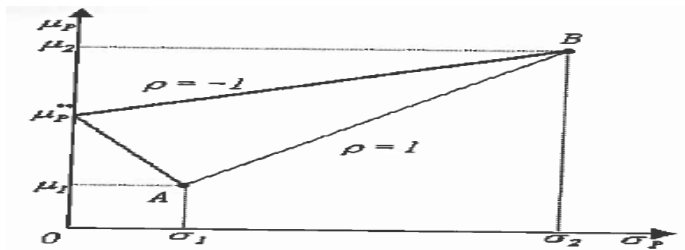
Con perfetta correlazione positiva, $\rho_{12} = 1$, la relazione è perfettamente lineare.

Media-Varianza. Caso $\rho_{12} = -1$

Con perfetta correlazione negativa, si ottiene la varianza minima se $\alpha^{**} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$. sostituiamo questo in $\mu_p = \mu_1 + \alpha(\mu_2 - \mu_1)$, si ottiene:

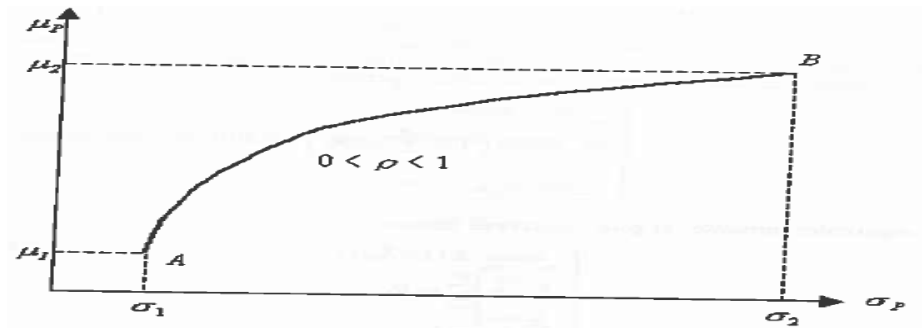
$$\mu_p = \mu_1 + \alpha^{**}(\mu_2 - \mu_1) \quad (28)$$

La (28) è crescente se $\mu_2 > \mu_1$, decrescente altrimenti. Dal punto di vista grafico:



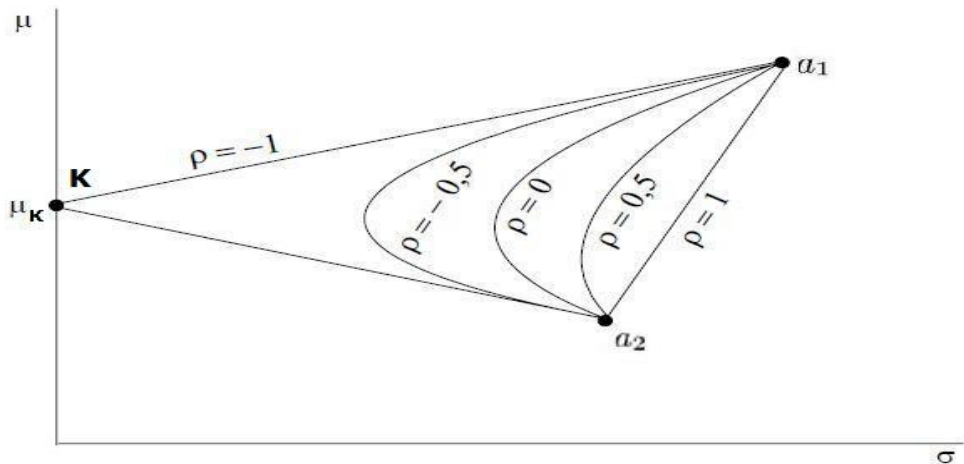
Diversificazione

Per correlazione inclusa nell'intervallo $0 < \rho < 1$, il grafico della frontiera è:



Frontiera

La frontiera efficiente per diversi valori del coefficiente di correlazione ρ



Portafoglio a minima varianza minima

Ricordiamo l'espressione per la varianza del portafoglio:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (29)$$

Se vogliamo minimizzare la varianza, possiamo scegliere il livello di α in modo tale che:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \alpha} = 2\alpha\sigma_2^2 - 2(1 - \alpha)\sigma_1^2 + 2\alpha(1 - 2\alpha)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0 \quad (30)$$

Da cui è possibile identificare, il livello di α tale per cui si ha la varianza minima. Pertanto:

$$\alpha = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} \quad (31)$$

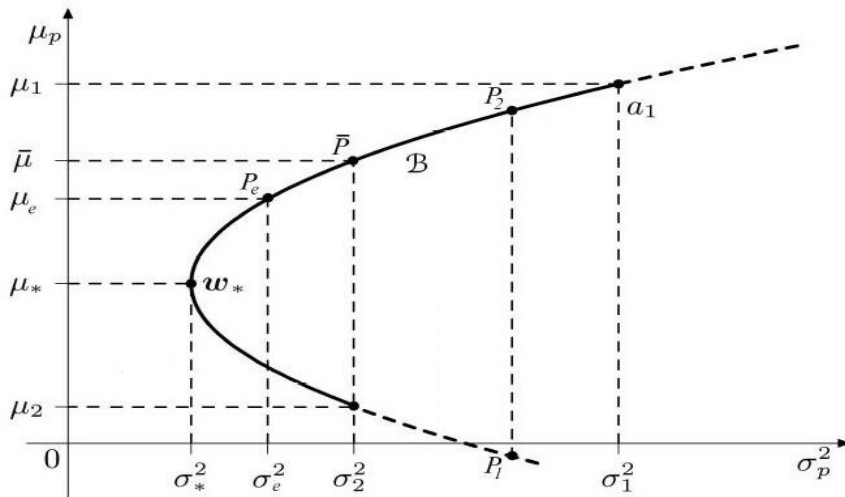
che indica la proporzione da investire nel titolo 2 per ottenere il portafoglio a minima varianza.

Per definizione la frontiera efficiente è il luogo delle possibili combinazioni rischio-rendimento (media-varianza) tale per cui si ottiene la varianza minima, per ogni dato livello di rendimento. In termini formali, ciò si può evidenziare come la soluzione del seguente problema:

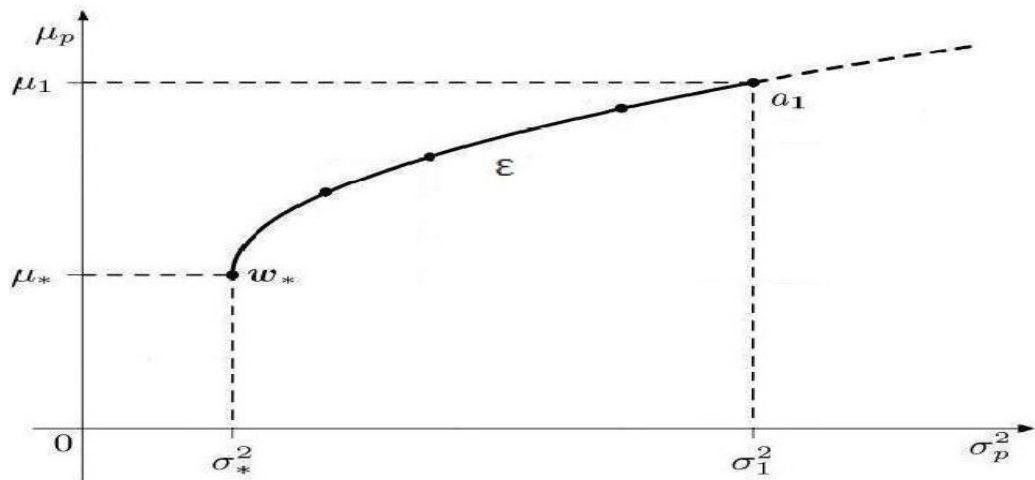
$$\min \sigma_p^2 \quad \text{c.v.} \quad \mu_p = \alpha\mu_2 + (1 - \alpha)\mu_1 \quad (32)$$

Markowitz fu il primo a definire il programma di ottimizzazione nel modo appena descritto. La soluzione di tale problema identifica la frontiera efficiente, che ha la struttura di una parabola.

Frontiera efficiente 2

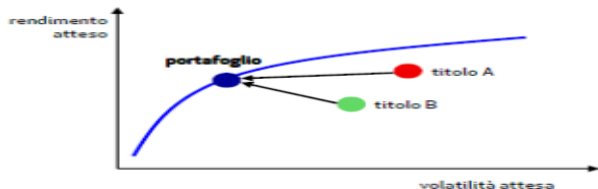


Portafogli efficienti e non



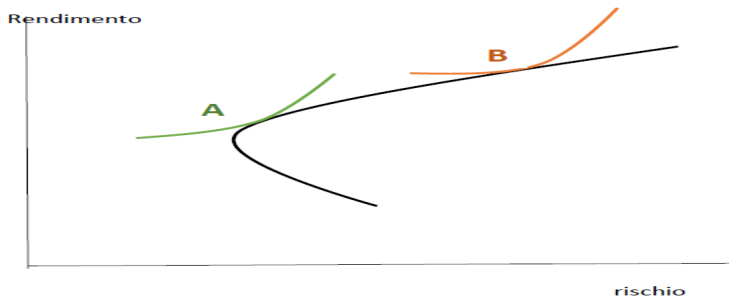
Frontiera efficiente 6

- Non è per nulla detto che un singolo titolo sia sulla frontiera. Di solito i titoli si trovano all'interno della frontiera.
- Per trovare un investimento sulla frontiera è necessario costruire un portafoglio correttamente differenziato.
- Un portafoglio formato da titoli non efficienti può essere efficiente (ovvero sulla frontiera) per via delle correlazioni basse tra i titoli che fanno parte del portafoglio.



Frontiera efficiente 7

- La scelta ottimale di portafoglio è determinata dalle preferenze di un individuo.
- Un soggetto avverso al rischio sceglie il portafoglio A.
- Un soggetto più tollerante del rischio si collocherà sul portafoglio B.



Titolo privo di rischio

Consideriamo la presenza di un titolo privo di rischio. Il portafoglio é dato da:

$$\tilde{R}_p = x_F R_F + (1 - x_F) \tilde{R}_i \quad (33)$$

Da cui in termini di valore atteso:

$$\mu_p = x_F \mu_F + (1 - x_F) \mu_i \quad (34)$$

Ricordiamo l'espressione della varianza di portafoglio:

da cui se consideriamo che abbiamo un titolo privo di rischio: $x_1 = x_F$, per cui $\sigma_1 = 0$, l'espressione della varianza é data da:

$$\sigma_p^2 = (1 - x_F)^2 \sigma_i^2 \quad (35)$$

O anche, considerando la radice quadrata:

$$\sigma_p = (1 - x_F) \sigma_i \quad (36)$$

da cui possiamo ricavare direttamente x_F .

Il caso con titolo privo di rischio

Ricaviamo il valore del peso dell'investimento:

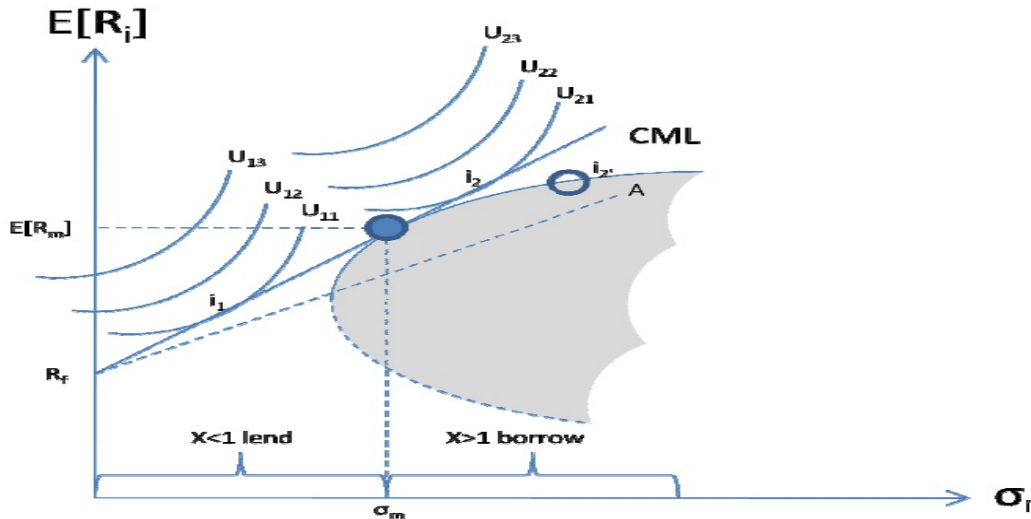
$$x_F = \frac{\sigma_i - \sigma_p}{\sigma_i} \quad (37)$$

da cui, ovviamente si ricava che: $1 - x_F = \frac{\sigma_p}{\sigma_i}$. Per cui, otteniamo che il valore del portafoglio é:

$$\mu_p = \left(\frac{\sigma_i - \sigma_p}{\sigma_i} \right) \mu_F + \frac{\sigma_p}{\sigma_i} \mu_i = \mu_F + \frac{\sigma_p}{\sigma_i} (\mu_i - \mu_F) \quad (38)$$

che é l'equazione di una retta, la cui pendenza é data da: $\frac{\mu_i - \mu_F}{\sigma_i}$

La frontiera



Possiamo individuare un punto sulla retta in corrispondenza di un dato valore di un titolo o di un portafoglio: a sinistra del titolo si ha una proporzione di investimento nel titolo rischioso e in quello non rischioso: in tale caso l'investitore 'presta' al mercato ricavandone un rendimento pari al titolo risk-free.

Per valori posizionati oltre il limite, otteniamo che sarà l'investitore a indebitarsi al tasso privo di rischio per ottenere un rendimento superiore a quello ottenibile con i limite di portafoglio.

- Se al posto di un singolo titolo, si considera un portafoglio di attività rischiose, si ottiene una combinazione lineare tra titolo privo di rischio portafoglio sulla frontiera, individuato tramite la condizione di tangenza tra retta e frontiera efficiente.
- **Teorema di separazione:** la determinazione della composizione del portafoglio sulla frontiera è separata dalla scelta tra quanto investire in attività prive di rischio e in attività rischiose.
- L'allocazione del portafoglio è indipendente da quanto investire in attività rischiose e prive di rischio.

Sotto quali condizioni possiamo definire che il portafoglio sulla frontiera è il portafoglio di mercato ?

Sotto quali condizioni possiamo definire che il portafoglio sulla frontiera è il portafoglio di mercato ?

- Tasso di interesse risk-free è il medesimo per tutti gli investitori
- La frontiera efficiente è la stessa per tutti gli investitori
- preferenze identiche: gli investitori utilizzano la stessa funzione di utilità attesa
- l'orizzonte temporale di riferimento è uniperiodale (questo è potenzialmente un problema)
- ogni investitore può prendere a prestito o prestare al medesimo tasso privo di rischio
- aspettative omogenee sui rendimenti attesi
- no costi di transazione o tasse.

Portafoglio e separazione 2

Sotto queste assunzioni M è il portafoglio di mercato. La nuova frontiera è allora definita dalla Capital Market Line:

$$\mu_P = \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \sigma_P \quad (39)$$

Il coefficiente angolare indica la remunerazione per ogni unità di rischio offerto dal portafoglio M.

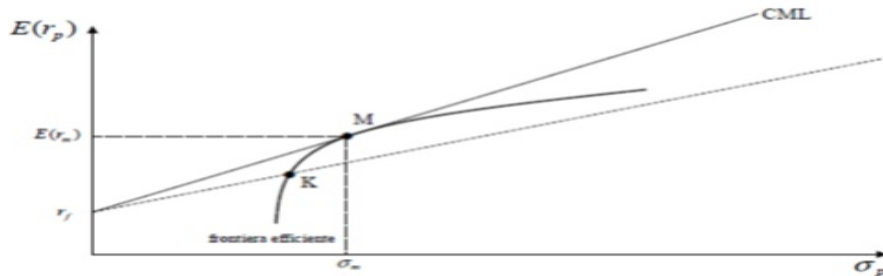
E' anche indicato come SHARPE RATIO, o SH:

$$SR = \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \quad (40)$$

Ricordiamo che tale risultato è ottenuto grazie ad una combinazione tra attività non rischiose ed attività rischiose che domina tutte le altre: il fatto che M è il portafoglio di mercato deriva proprio da questo. Tutti gli investitori, potendo contare sulla stessa frontiera, sceglieranno lo stesso portafoglio, che è il portafoglio di mercato.

Portafoglio e separazione

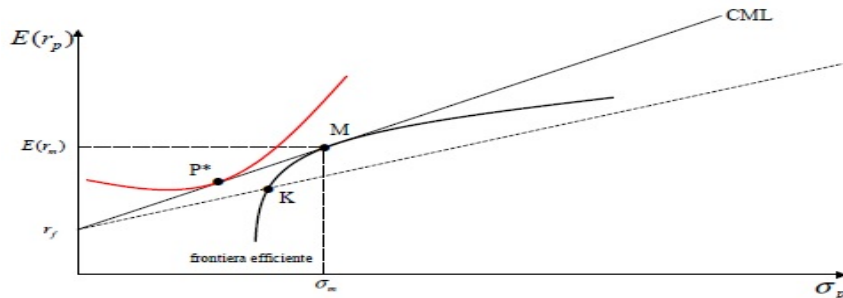
Intuitivamente la Capital Market Line permette di individuare tutte le combinazioni tra attività risk-free e portafoglio di mercato che sono in grado di offrire il più alto rendimento atteso per unità di rischio.



La CML è identica per ogni investitore.

Portafoglio e separazione

Il portafoglio per ogni singolo investitore è individuato dal punto di tangenza tra la CML e la più elevata curva di indifferenza che rappresenta il grado di atteggiamento verso il rischio.



La CML diventa la vera frontiera efficiente: come conseguenza del fatto che TUTTI scelgono il medesimo portafoglio di titoli rischiosi M .

La scelta di portafoglio avviene con un criterio a due stadi:

- primo passo: scelta ottimale all'interno di un portafoglio di titoli rischiosi.
- secondo passo: scelta come allocare la ricchezza tra portafoglio M e l'attività priva di rischio, in base al proprio atteggiamento verso il rischio.
- La determinazione del portafoglio ottimo è indipendente dalla sua composizione.
- Se il tasso privo di rischio è il medesimo per tutti gli investitori e tutti hanno le stesse preferenze, tutti sceglieranno il medesimo portafoglio. questo è quindi il portafoglio di mercato, indicato con M.

La logica della diversificazione

- Investendo in più assets otteniamo una varianza inferiore a quello che otterremmo dalla concentrazione in un solo asset.
- Anche assets rischiosi possono essere inseriti nel portafoglio per ridurre la volatilità totale, purché abbiano una correlazione negativa con i titoli in portafoglio.
- Con correlazione zero tra i titoli, l'aggiunta di un titolo con correlazione negativa, riduce la varianza di portafoglio.

Infatti, suppongo di avere n assets con $\rho_{ij} = 0$, la varianza di portafoglio è:

$$\sigma_p^2 = (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2)$$

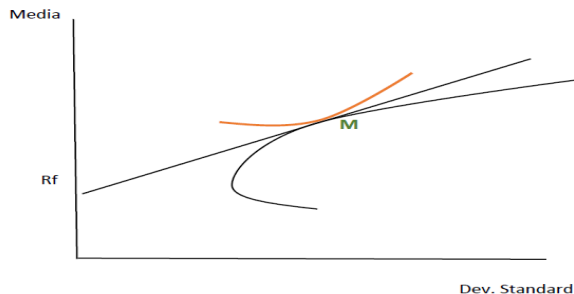
supponiamo che i) i titoli abbiano la stessa varianza: $\sigma_i^2 = \sigma^2$ per ogni i . ii) i titoli siano tenuti nella stessa proporzione: $\alpha_i = 1/n$, allora:

$$\sigma_p^2 = \frac{(n\sigma^2)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = 0$: totale riduzione del rischio

La soluzione di equilibrio

- In equilibrio tutti scelgono il portafoglio di mercato.
- La CML separa l'insieme delle preferenze da quello della frontiera efficiente.
- In equilibrio la pendenza della CML e quella della frontiera devono essere la stessa.
- Ciò ci permette di dimostrare formalmente il Capital Asset Pricing Model.



Il CAPM e la Security Market Line

Ricordiamo ancora il coefficiente angolare (ovvero: la pendenza della CML) eguale allo Sharpe Ratio:

$$SR = \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \quad (41)$$

Tale coefficiente indica quale deve essere il rendimento atteso necessario a compensare l'investitore della crescita unitaria del livello di rischio. E' la remunerazione ricevuta per ogni unità aggiuntiva di rischio sopportata.

Altra definizione: Market Price of Risk.

Ad esempio: $\mu_F = 0.5\%$, $\mu_M = 2\%$, $\sigma_M = 5\%$: il market price of risk è:

$$SR = \frac{(2\% - 0.5\%)}{5\%} = 0.3\% \quad (42)$$

Il rendimento atteso sulla CML in corrispondenza di $\sigma_p = 8\%$:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \sigma_p \\ &= 0.5\% + 0.3\% \times 8\% = 2.9\% \end{aligned}$$

La Security Market Line 2

Grazie a ciò è possibile stimare il rendimento atteso sulla CML in corrispondenza di una deviazione standard pari a 8%:

$$\begin{aligned}\mu_p &= \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \sigma_p \\ &= 0.5\% + 0.3\% \times 8\% = 2.9\%\end{aligned}\tag{43}$$

Che è il rendimento atteso per un portafoglio con un target di volatilità pari all' 8 per cento. Una delle proprietà più importanti del CAPM è data dal fatto che le medesime relazioni possono essere applicate a qualunque attività finanziaria. Tuttavia, perchè ciò sia possibile, dobbiamo modificare leggermente l'equazione della CML. Perchè ?

La risposta risiede nel fatto che la CML è valida solo per portafogli efficienti (che stanno sulla frontiera, cioè) per i quali rischio sistematico e non sistematico (o rischio totale) coincidono: in altre parole, la CML ci offre il massimo livello di diversificazione ottenibile.

La Security Market Line 3

La CML permette una remunerazione del rischio NON diversificabile (che è il rischio di mercato). Pertanto, se vogliamo una relazione di equilibrio tra il rendimento di un singolo dobbiamo considerare in primo luogo, la CML scritta per un generico titolo i , dove al posto della volatilità del portafoglio p sostituiamo un'espressione per il rischio sistematico per il generico titolo al posto di σ_p . Ovvero, data la CML:

$$\mu_p = \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \sigma_{sist} \quad (44)$$

Riscrivo per il singolo titolo i con μ_i al posto di μ_p e considero al posto di σ_{sist} un'espressione per il rischio sistematico che ponga in relazione la correlazione del singolo titolo con il mercato.

$$\sigma_{sist} = \rho_{i,m} \sigma_i \quad (45)$$

dove $\rho_{i,m}$ è il coefficiente di correlazione tra il singolo titolo e il mercato. Inoltre, σ_i indica la volatilità del singolo titolo.

La Security Market Line 4

$$\mu_i = \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \rho_{i,m} \sigma_i \quad (46)$$

Ricordo la definizione del coefficiente di correlazione:

$$\rho_{i,m} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_i \sigma_M} \quad (47)$$

Da cui otteniamo:

$$\mu_i = \mu_F + (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_{i,M} \sigma_i}{\sigma_i \sigma_M^2} == \mu_F + (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \quad (48)$$

Che diventa:

$$\mu_i = \mu_F + (\mu_M - \mu_F) \beta_{i,m} \quad (49)$$

dove il beta $\beta_{i,m}$ è definito da:

$$\beta_{i,m} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \quad (50)$$

La Security Market Line 5

L'equazione:

$$\mu_i = \mu_F + (\mu_M - \mu_F)\beta_{i,m} \quad (51)$$

indica la Security Market Line (SML), con il beta $\beta_{i,m}$ dato da:

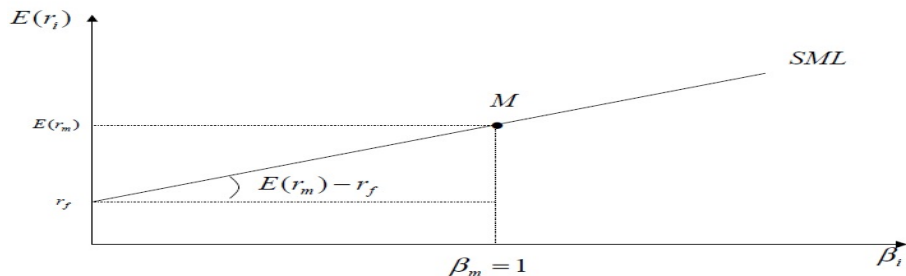
$$\beta_{i,m} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \quad (52)$$

Il beta indica il contributo marginale del singolo titolo i rispetto alla rischiosità del portafoglio di mercato M.

La SML insieme al CML è la relazione fondamentale del CAPM.

La Security Market Line 6

L'equazione: $\mu_i = \mu_F + (\mu_M - \mu_F)\beta_{i,m}$, può essere rappresentata come segue:



La pendenza $(\mu_M - \mu_F)$ indica il premio del rendimento di mercato sul tasso privo di rischio.

Il beta

La Security Market Line stabilisce il luogo di tutti i punti corrispondenti ai portafogli di equilibrio. E' una relazione valida per ogni portafoglio ma anche per ogni titolo.

Tutti i titoli possono essere quantificati in base al beta. In primo luogo, il beta del portafoglio di mercato è pari ad uno:

Dato:

$$\beta_{i,m} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \quad (53)$$

se $i = M$:

$$\beta_m = \frac{\sigma_{M,M}}{\sigma_M^2} = 1 \quad (54)$$

Consideriamo altri casi:

- se $\beta_{i,m} = 0$, il titolo i esimo non è correlato con il mercato: il suo rendimento è pari esattamente a μ_F .
- se $\beta_{i,m} > 1$, il titolo i è considerato essere aggressivo, in quanto dall'espressione del beta si ha che: $\sigma_{i,M} > \sigma_M$, ovvero la covarianza del titolo i rispetto al mercato M è superiore al rischio del mercato stesso. Il titolo i è più rischioso del mercato.
- se $\beta_{i,m} < 1$, il titolo è meno rischioso del mercato, ovvero rappresenta un titolo difensivo.
- se $\beta_{i,m} < 0$, titolo negativamente correlato con il mercato.

La Security Market Line (SML) permette di

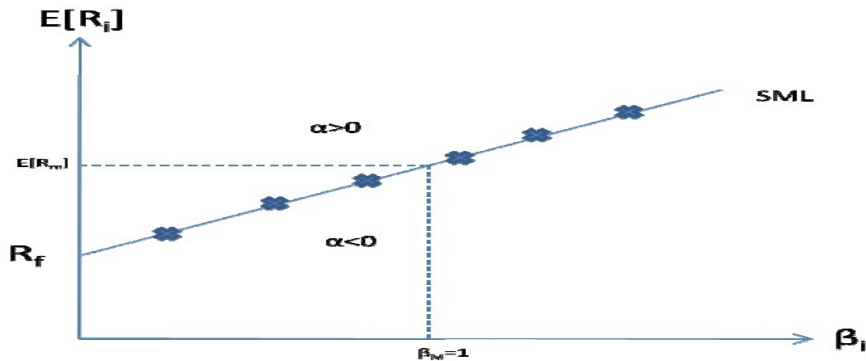
- determinare il tasso di remunerazione appropriato per aziende e progetti di investimento caratterizzati da un predeterminato livello di rischio sistematico.
- identificare le attività finanziarie il cui valore non è allineato con le attese per il rischio corrette per il loro rischio sistematico.

In questo senso, la SML è un'equazione di pricing, dal momento che solo le attività finanziarie correttamente prezzate producono un rendimento collocato esattamente sulla SML.

Ovviamente, i titoli che si collocano al di sopra o al di sotto di tale curva, sono sovra-o sotto prezzati.

SML e valutazione

- sopra la SML: rendimento troppo alto rispetto all'equilibrio. Titoli sottoprezzati: compro.
- sotto la SML: rendimento troppo basso rispetto all'equilibrio. Titoli sovrapprezzati: vendo.



Una dimostrazione formale

Considero nuovamente l'equazione della CML scritta per un portafoglio generico ottenuto come combinazione lineare tra il portafoglio di mercato il cui rendimento medio è μ_M e il titolo privo di rischio μ_F :

$$\mu_p = \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \sigma_p \quad (55)$$

Come sappiamo la pendenza è data dallo Sharpe Ratio.

Consideriamo ora un portafoglio formato da un generico titolo e il portafoglio di mercato e chiediamoci: quanto devo o posso aumentare la proporzione del titolo rischioso rispetto al portafoglio di mercato in modo da massimizzare il mio rendimento ?

In altre parole: quanto posso far crescere il mio rendimento aumentando quel titolo rischioso rispetto al portafoglio ?

Una dimostrazione formale 2

Per rispondere, considero la combinazione tra titolo i e il portafoglio di mercato. Essa stessa è un portafoglio con rendimento medio μ_p

$$\mu_p = \alpha\mu_i + (1 - \alpha)\mu_M \quad (56)$$

La varianza di questo portafoglio sarà:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2\sigma_i^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho_{im}\sigma_i\sigma_m \quad (57)$$

e la deviazione standard è:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \left[\alpha^2\sigma_i^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho_{im}\sigma_i\sigma_m \right]^{1/2} \quad (58)$$

Qual'è il vantaggio marginale dal crescere α ?

Sul rendimento:

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial \alpha} = \mu_i - \mu_M \quad (59)$$

Una dimostrazione formale 3

E sul rischio, data la deviazione standard è:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \left[\alpha^2 \sigma_i^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_m^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho_{im}\sigma_i\sigma_m \right]^{1/2} \quad (60)$$

dobbiamo calcolare:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \left[\sigma_p^2 \right]^{\frac{1}{2}-1} \left\{ 2\alpha \sigma_i^2 - 2(1 - \alpha)\sigma_m^2 + (1 - 2\alpha)\sigma_{im} \right\} \quad (61)$$

con $\rho_{im}\sigma_i\sigma_m = \sigma_{im}$. Che ovviamente diventa:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma_p} \left\{ \alpha \sigma_i^2 - (1 - \alpha)\sigma_m^2 + (1 - 2\alpha)\sigma_{im} \right\} \quad (62)$$

Chiaramente, nel punto ottimale, $\alpha = 0$: l'incremento ottimale calcolato in corrispondenza del portafoglio di mercato ($p = m$) è:

$$\left. \frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{(\sigma_{im} - \sigma_m^2)}{\sigma_m} \quad (63)$$

Una dimostrazione formale 4

Richiamo:

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial \alpha} = \mu_i - \mu_M \quad (64)$$

e:

$$\left. \frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{(\sigma_{im} - \sigma_m^2)}{\sigma_m} \quad (65)$$

La pendenza della frontiera efficiente nel punto di ottimo (in corrispondenza del portafoglio di mercato) è:

$$\frac{\frac{\partial \mu_p}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha}} = \frac{(\mu_i - \mu_M) \sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} \quad (66)$$

Chiaramente tale risultato deve necessariamente essere uguale alla pendenza della CML in equilibrio. Per cui:

Una dimostrazione formale 5

$$\frac{(\mu_i - \mu_M)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_M^2} = \frac{\mu_M - \mu_F}{\sigma_M} \quad (67)$$

da cui:

$$\mu_i - \mu_M = (\mu_M - \mu_F) \frac{(\sigma_{im} - \sigma_M^2)}{\sigma_M^2} \quad (68)$$

che diventa:

$$\mu_i - \mu_M = (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_{im}}{\sigma_M^2} - (\mu_M - \mu_F) \quad (69)$$

Ovvero:

$$\mu_i = \mu_F + (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_{im}}{\sigma_M^2} \quad (70)$$

Una dimostrazione formale 5

$$\frac{(\mu_i - \mu_M)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_M^2} = \frac{\mu_M - \mu_F}{\sigma_M} \quad (71)$$

da cui:

$$\mu_i - \mu_M = (\mu_M - \mu_F) \frac{(\sigma_{im} - \sigma_M^2)}{\sigma_M^2} \quad (72)$$

che diventa:

$$\mu_i - \mu_M = (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_{im}}{\sigma_M^2} - (\mu_M - \mu_F) \quad (73)$$

Ovvero:

$$\mu_i = \mu_F + (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_{im}}{\sigma_M^2} \quad (74)$$

Una dimostrazione formale 5

Richiamo

$$\mu_i = \mu_F + (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_{im}}{\sigma_M^2} \quad (75)$$

ricordo la definizione di $\beta_{i,m} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_M^2}$, per cui:

$$E(R_i) = R_F + \beta_{i,m} [E(R_M) - R_F] \quad (76)$$

che è la SML.

- ① Il CAPM è stato derivato sotto l'ipotesi secondo cui ad un livello del tasso risk free corrisponde un unico portafoglio di mercato.
- ② Roll (1977) sfida il criterio di unicità del portafoglio di mercato e dimostra la possibilità di identificare un qualunque indice di cui si conosca la composizione come portafoglio di mercato. Che non è unico.
- ③ Non è necessaria la presenza del titolo risk-free, ma è sufficiente la presenza di un indice sulla frontiera per identificare un portafoglio ortogonale.

Verso una generalizzazione

- Il modello media-varianza può essere generalizzato ad un insieme di titoli molto grande.
- Consideriamo $N \geq 2$ titoli rischiosi, caratterizzati da un vettore di rendimenti casuali $\tilde{R}$, il cui valore atteso è $\mu = E(\tilde{R})$, con $\mu^{N \times 1}$.
- E' permesso short selling.
- Matrice varianza covarianza Σ è simmetrica e non singolare, con dimensione $N \times N$.
- I pesi di portafoglio sono dati da w .

La frontiera efficiente è il risultato di un processo di ottimizzazione volto a minimizzare il rischio per ogni dato livello di rendimento.

La matematica della frontiera efficiente

- Un portafoglio p è sulla frontiera se e solo se il vettore dei pesi w_p è la soluzione del seguente problema:

$$\min_{\{w\}} \frac{1}{2} w' \Sigma w \quad (77)$$

$$\text{s.t. } w' \mu = E(\tilde{r}_p) = \mu_p \quad (78)$$

$$w' \mathbf{1} = 1 \quad (79)$$

- Il vincolo (75) indica la media del portafoglio come il prodotto dei pesi per il rendimento medio dei titoli rischiosi.
- Il vincolo (79) indica che la somma dei pesi del portafoglio deve sempre essere 1. Senza la possibilità di short selling dovremmo aggiungere anche il vincolo di non-negatività dei pesi: $w_i \geq 0$ per ogni i .

II Modello Media-Varianza

- Consideriamo anche la presenza di un titolo privo di rischio R_f .
- Definisco l'eccesso di rendimento di ogni titolo rispetto al titolo privo di rischio come:
 $r_t = R_t - R_{ft}1'_N$, con $1'_N$, $N \times 1$ vettore di uno.
- Dati i pesi di portafoglio w , il portafoglio di titoli rischiosi è $R_{pt} = w'R_t$, la cui media e varianza sono:

$$\mu_p = w'\mu \quad (80)$$

$$\sigma_p^2 = w'\Sigma w \quad (81)$$

Richiamo inoltre la funzione di utilità in media-varianza:

$$U(w) = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2 \quad (82)$$

L'investitore massimizza l'utilità (82) nella quale la media e la varianza sono date da (85)-(86).

Il Modello Media-Varianza

Il problema di ottimizzazione è:

$$\max_{\{w\}} U(w) = \mu_p - \frac{\gamma}{2} \sigma_p^2 \quad (83)$$

La cui soluzione è data dal seguente insieme di pesi ottimali di portafoglio:

$$w^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu \quad (84)$$

E' evidente che gli ingredienti cruciali del problema di portafoglio sono il vettore della media e la matrice varianza-covarianza.

Il CAPM funziona ?

- Difetto principale del CAPM: La forte instabilità dell'allocazione ottenuta per il portafoglio ottimale, per una data variazione dei parametri.
- i parametri essenziali nel calcolo dell'allocazione di portafoglio sono essenzialmente tre: i) la media dei rendimenti, o μ , ii) la matrice varianza-covarianza Σ , iii) il grado di avversione al rischio γ .
- Instabilità significa che: al variare di uno dei parametri sopra citati i pesi risultanti dall'allocazione ottimale cambiano in modo MOLTO significativo.

Esempio: Consideriamo il caso con tre titoli e verifichiamo, tramite una semplice sensitivity analysis, come cambia l'allocazione ottimale di portafoglio.

Il CAPM funziona ? Esempio

Consideriamo il caso con 3 titoli

- $\mu_1 = \mu_2 = 8\%$, $\mu_3 = 5\%$, $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 21\%$, $\sigma_3 = 10\%$, $\rho_{i,j} = 80\%$
- Obiettivo: ottimizzazione del portafoglio.
- Portafoglio ottimale: i pesi allocati ai tre titoli sono: $w_1 = 38.3\%$, $w_2 = 20.2\%$, $w_3 = 41.5\%$

L'analisi di sensitività è riportata nella tabella:

ρ σ_2 μ_1		70%	90%	18%	90%	
					18%	9%
x_1		38.3	38.3	44.6	13.7	-8.0
x_2		20.2	25.9	8.9	56.1	74.1
x_3		41.5	35.8	46.5	30.2	34.0
						60.6
						-5.4
						44.8

Come gestire i problemi ?

Per ovviare al problema, la letteratura ha identificato diverse strategie, ritenendo che ciò sia il risultato di una cattiva specificazione del modello. A tale scopo sono state proposte estensioni del modello di base, essenzialmente rimuovendo le assunzioni di base, introducendo:

- Diverse definizioni del portafoglio di mercato, per ovviare al disegno efficiente della frontiera.
- Introduzione delle aliquote fiscali.
- Asset allocation per momenti superiori al primo (asimmetria e curtosi).

Nessuna delle strategie sopra elencate ha permesso di rappresentare una soluzione efficace ai problemi del CAPM.

Altra strada: Regularizzazione

Tecniche di Regularizzazione

Essenzialmente, la strategia scelta per risolvere il problema risiede in una regolarizzazione di tre elementi:

- regolarizzazione della funzione obiettivo utilizzando tecniche di ri-campionamento dei dati.
- Regolarizzazione della matrice di varianza-covarianza Σ , attraverso tre aspetti principali:
 - ▶ modelli bayesiani: black littermann, modelli shrinkage
 - ▶ matrici casuali
 - ▶ modelli fattoriali
- Introduzione di vincoli al programma di asset allocation.

La regolarizzazione è funzionale a ottenere una matrice inversa della matrice varianza covarianza ben conformata (Σ^{-1}), che viene anche definita matrice di informazione. Ma ancora non c'è la risposta alla domanda: perchè il modello CAPM non funziona ?

Perchè il CAPM non funziona ?

Proviamo a ripresentare in estrema sintesi l'approccio media - varianza.

- Consideriamo un insieme di attività rischiose pari a N risky assets, con rendimento pari a R_t , variabili casuali con distribuzione normale $N(\mu, \Sigma)$.
- Introduciamo un attività priva di rischio R_f .
- Possiamo inserire l'extra-rendimento: $r_t = R_t - R_f \mathbf{1}'_N$, con $\mathbf{1}'_N$ is an $N \times 1$ vector of ones.
- Considero i pesi di portafoglio w . Il portafoglio di attività rischiose è $R_{pt} = w' R_t$, con media e varianza:

$$\mu_p = w' \mu \quad (85)$$

$$\sigma_p^2 = w' \Sigma w \quad (86)$$

- Funzione utilità in media-varianza:

$$U(w) = \mu_p - \frac{\gamma}{2} \sigma_p^2 \quad (87)$$

Perchè il CAPM non funziona ?

I pesi ottimali sono ottenuti tramite la massimizzazione della funzione di utilità e la soluzione e' data dalla seguente funzione ottimale dei pesi di portafoglio:

$$w^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu \quad (88)$$

come si vede, il peso ottimale è in funzione dell'inversa della matrice varianza covarianza Σ^{-1} . Quindi: dati come input la media μ e la varianza Σ , si ottiene l'asset allocation ottimale. Il problema è che media e varianza sono ottenibili con un errore di stima talmente elevato che implica un bias fortissimo nell'allocazione finale che da' luogo ai problemi elencati che rendono l'allocazione equipesata migliore alla (88).

Il bias di stima

Per quantificare il bias di stima, è possibile distinguere tre casi:

- Media, μ nota, varianza Σ ignota;
- Media, μ ignota, varianza Σ nota;
- Media, μ ignota, varianza Σ ignota;

Ignota vuol dire che deve essere stimata, attraverso procedure statistico-econometriche. Possiamo vedere il bias di stima per alcuni dei casi sopra citati.

Ricordiamo il portafoglio ottimale:

$$w^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu \quad (89)$$

In generale, il bias di stima:

$$E(\hat{w}) = \frac{T}{(T - N - 2)} w^* \quad (90)$$

Il bias di stima 2

In generale, il bias di stima:

$$E(\hat{w}) = \frac{T}{(T - N - 2)} w^* \quad (91)$$

Che dipende dalla numerosità del campione T , dal numero dei titoli N . Chiaramente, si vede che il bias di stima induce l'investitore a posizionarsi su titoli più rischiosi, dal momento che il rapporto $T/(T - N - 2)$ è maggiore di uno.

E' possibile dimostrare che nemmeno la numerosità del campione può attenuare il problema.

Risultato paradossale: *il portafoglio con tutti i titoli che entrano in modo equiponderato risulta fornire performance migliori del modello media-varianza !!!!!*

- Il risultato del CAPM: Sharpe
- La critica di Roll: Roll (1977), Journal of Finance.
- La fluttuazione dei pesi eccessiva: Best and Grauer (1991), RFS.
- Il portafoglio equiponderato (1/N): Garlappi, Uppal, 2007
- L'estimation Bias: Khan and Zhou (2012)
- Sulle normalizzazioni: bella rassegna in Roncalli (2012)

Estensioni al CAPM

Il fatto che il CAPM non funzioni, ha stimolato la ricerca delle ragioni. In un primo tempo, si pensava che il problema fosse nelle assunzioni troppo restrittive, e si è provato a modificare il CAPM generalizzando il modello, rimuovendo alcune ipotesi troppo forti. Alcuni esempi:

- Introduzione di tasse sui rendimenti.
- Modifica della definizione del portafoglio di mercato.
- estensione al caso con momenti superiori ai primi due.
- Differenza tra tassi privi di rischio per borrowers e lenders.

Risultato: *nessuna delle estensioni proposte in letteratura ha portato ad un miglioramento della performance del modello di base, il cui problema è dovuto quasi unicamente all'errore di stima.*

Per evitare le enormi fluttuazioni dei pesi, in molti casi gli asset managers impongono vincoli sui pesi stessi. Quali sono gli effetti di tale approccio ?

Modificando i pesi, il gestore implicitamente genera un impatto:

- sulla grandezza e sull'ordine delle volatilità.
- sul valore, sul segno e sull'ordinamento delle correlazioni.

E' possibile dimostrare che introdurre vincoli sull'allocazione finale è equivalente a introdurre delle views relative (similmente a quanto fatto nel modello Black-Littermann) o ad adottare un modello bayesiano di stima (che comporta stimatori *shrinkage*)

Alcuni metodi di normalizzazione

- Gestione dei dati: stima efficiente della VCV
- Resampling
- De-noising VCV
- Shrinkage - Jorion
- Approccio Ledoit-Wolf
- Modello Black-Littermann

Il punto da cui partire è la definizione della frequenza del dato: ciò permette di eliminare o attenuare la volatilità che è associata ai dati ad elevata frequenza (giornalieri).

In modo semplice: se ho obiettivo asset allocation con frequenza di revisione trimestrale, posso scegliere dati giornalieri, ma farne una media su un orizzonte più ampio (ad es un mese), in modo da avere dati più stabili. Poi però devo sapere che per un mese non devo aggiustare troppo l'asset allocation, perchè le revisioni sono mensili o trimestrali.

Il messaggio è: considerare un time-frame di stima compatibile con gli obiettivi di asset allocation in termini di orizzonte temporale.

Orizzonte di investimento come driver

L'orizzonte temporale di investimento (e la frequenza di revisione dell'Asset Allocation) è uno dei drivers più importante di asset allocation da considerare.

Possiamo distinguere i diversi casi:

- Market timing: è un obiettivo per un investimento con orizzonte limitato, di breve termine: da 1 giorno a 1 mese.
- Asset Allocation Tattica: Obiettivo di medio termine, da tre mesi a un anno/ due anni. E' una forma di investimento che ha come obiettivo quello di controbilanciare gli effetti derivanti dal ciclo economico. Asset Allocation di tipo macro-finance.
- Asset Allocation Strategica: investimento di lungo termine (oltre un anno), oltre la durata del ciclo.

Considero una stima della media $\hat{\mu}$ e della matrice VCV $\hat{\Sigma}$, l'idea consiste attraverso la realizzazione di una procedura di ricampionamento. La metodologia consiste nei seguenti passi:

- Calcolo di $\hat{\mu}$ e di $\hat{\Sigma}$.
- Calcolo portafoglio ottimale $\hat{w}$, sulla base di $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$.
- Ricampionamento dei dati e ricalcolo di $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$ e dei pesi $\hat{w}$, per n esercizi di ricampionamento casuale dei dati.
- Media di tutti i pesi $\hat{w}$ ottenuti dopo il ricampionamento.
- Calcolo della frontiera efficiente, basata sulle medie ex post.

Risultato: pesi molto *smoothed-out*, con scarsa oscillazione e picchi.

Problemi: non risolve il bias di stima, dal momento che se le stime iniziali sono biased, lo sarà anche il risultato finale.

Tecniche di stima robuste della matrice VCV:

- Modello Hayashi-Yoshida.
- GARCH
- Imposizione di una struttura di correlazione: modelli fattore.
- Estrazione delle componenti principali e scelta delle componenti che spiegano più di $1/n$ della varianza dei titoli.

Tutti metodi che tendono a estrarre le componenti di disturbo di breve periodo delle varie serie storiche, per depurare gli effetti dovuti alle attività di trading.

Risultato: parzialmente efficace.

Shrinkage

Idea: modifica della matrice varianza-covarianza in una nuova che tenga conto dell'incertezza dovuta alla stima. E' un caso particolare di modelli bayesiani. In particolare, lo stimatore shrinkage di Jorion è dato dalla seguente espressione:

$$\Sigma_{\alpha} = \left(1 + \frac{1}{T + \alpha}\right) \hat{\Sigma} + \left(\frac{\alpha}{T(T + \alpha + 1)}\right) \frac{11'}{1'\hat{\Sigma}1} \quad (92)$$

con $\hat{\Sigma}$ stima non vincolata della VCV ed α parametro di shrinkage.

In particolare, se $\alpha = 0$, $\Sigma_{\alpha} = \hat{\Sigma}$ e no shrinkage.

Inoltre:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Sigma_{\alpha} = \hat{\Sigma} + \frac{1}{T} \frac{11'}{1'\hat{\Sigma}1} \quad (93)$$

Il termine a destra agisce come fattore di correzione.

Idea: si tratta di creare una combinazione tra due matrici VCV ottenute con due metodi diversi. Il primo è dato dalla stima del modello a fattore $\hat{\Phi}$, che permette una più rapida convergenza. Il secondo metodo è dato dalla stima tradizionale $\hat{\Sigma}$. Per cui:

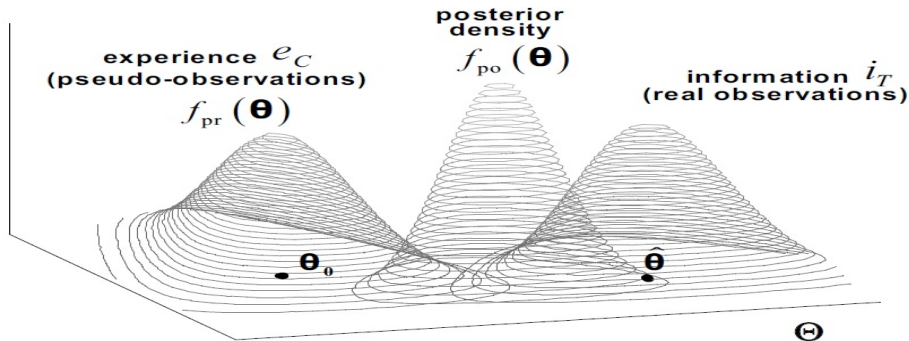
$$\hat{\Sigma}_{\alpha} = \alpha \hat{\Phi} + (1 - \alpha) \hat{\Sigma} \quad (94)$$

Sono tutte tecniche che non sono sufficienti a eliminare i problemi che avviliscono il modello, anche se ne attenuano i sintomi.

I modelli bayesiani, di cui lo stimatore Shrinkage è un esempio, meritano un piccolo approfondimento.

Modelli Bayesiani

Logica dei modelli bayesiani: non ci sono solo le informazioni che vengono dai dati (informazioni campionarie, identificate con la funzione di informazione o di verosimiglianza), ma esistono anche informazioni extra-campionarie, date dal complesso di esperienza e di capacità previsiva di ogni gestore, identificate da una distribuzione *prior*.



Modelli Bayesiani 2

La soluzione di tale esercizio è una nuova distribuzione statistica, posterior, che combina elementi della prior e della verosimiglianza. Chiaro che la forma della posterior dipenderà da quanto più o meno si assegna importanza all'informazione campionaria o extra-campionaria.

Altri elementi:

- Ipotesi sulle densità *prior* e *verosimiglianza*. Non si ha soluzione in forma chiusa per tutti i casi, ma i per più comuni sì.
- Ipotesi su incertezza: se su media o varianza o entrambe.

Modelli molto ricchi e molto interessanti per le varianti che propongono.

Gli stimatori sono tutti di tipo Shrinkage: Bayes-Stein, con diverse varianti.

Il modello Black-Littermann è un caso particolare dei modelli bayesiani.

- Informazione dal campione di dati: verosimiglianza
- Informazione dall'esperienza del gestore: views, basate sulla conoscenza e l'esperienza del gestore.

Il gestore formula views sull'andamento futuro delle variabili e associa a ciascuna view la sua fiducia. Come esempio, una view può essere formulata in due modi:

- **View Assoluta:** Il titolo x crescerà del 2 per cento. View Assoluta
- **View Relativa:** Il titolo x avrà un rendimento maggiore del 3 per cento rispetto al titolo y .

Black-Littermann 2

Oltre a quanto già considerato, il modello Black-Littermann considera anche una serie di elementi in più, quali alcune considerazioni sul ruolo dell'equilibrio di mercato.

Ripartiamo dalla definizione dell'equilibrio dei pesi dle portafoglio ottimale nel contesto media-varianza:

$$w = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu \quad (95)$$

Nel modello media-varianza w è 'incognita, la cui soluzione è data dalla (95).

Secondo il modello Black-Littermann, invece, si parte da un *reverse engineering*, tale per cui data w_0 , come soluzione ottimale, si ha dalla (95):

$$\tilde{\mu} = \gamma \Sigma w_0 \quad (96)$$

con $\tilde{\mu}$ si indica il vettore dei rendimenti coerente con i pesi w_0 .

Black-Littermann 3

Richiamo:

$$\tilde{\mu} = \gamma \Sigma w_0 \quad (97)$$

Dal punto di vista del gestore w_0 è ottimale. Se così non fosse, il gestore avrebbe incentivo a sceglierne un altro. Quindi per questo motivo, w_0 è il portafoglio di mercato (ovvero il portafoglio tangente) e $\tilde{\mu}$ è il vettore dei rendimenti attesi di mercato (se vogliamo può essere considerato il rendimento del mercato).

L'altro parametro da calibrare è γ , che indica l'avversione al rischio. Dalla (97), pre-moltiplicando per w_0' :

$$w_0' \tilde{\mu} = \gamma w_0' \Sigma w_0 \quad (98)$$

da cui:

$$\gamma = \frac{w_0' \tilde{\mu}}{w_0' \Sigma w_0} = \underbrace{\frac{w_0' \tilde{\mu}}{\sqrt{w_0' \Sigma w_0}}}_{SR(w_0)} \frac{1}{\sqrt{w_0' \Sigma w_0}} = \frac{SR(w_0)}{\sqrt{w_0' \Sigma w_0}} \quad (99)$$

Richiamo:

$$\gamma = \frac{SR(w_0)}{\sqrt{w_0' \Sigma w_0}} \quad (100)$$

dove $SR(w_0)$ indica lo Sharpe Ratio associato all'indice di mercato. Esso può essere come un target per l'investitore, data l'allocazione di mercato.

Con queste informazioni siamo ora in grado di approfondire il modello Black-Littermann.

Il modello cerca di presentare una stima robusta della media, sulla scorta del fatto che è più grave avere una stima distorta della media che della matrice varianza-covarianza.

Il punto centrale è dato dal fatto che la media μ non può essere stimata con certezza. Per cui assumiamo che:

$$\mu \sim N(\tilde{\mu}, \Gamma) \quad (101)$$

Il gestore può formulare views sulla media μ , nel modo seguente:

$$P\mu = Q + \epsilon \quad (102)$$

- dove P è una matrice di dimensioni $k \times n$, con k dato il numero delle views ed n il numero degli assets.
- Q ha dimensioni $k \times 1$,
- $\epsilon \sim N(0, \Omega)$, con Ω , matrice legata all'incertezza delle views (ha dimensioni $k \times k$).

Black Littermann: le views 1

Consideriamo alcuni esempi.

Consideriamo una view assoluta sul titolo 1:

$$\mu_1 = q + \epsilon \quad (103)$$

ciò vuol dire che la matrice P uguale al vettore riga $(1, 0)$ e il gestore ritiene che il rendimento atteso del titolo 1 sia pari a q . In particolare, se $\Omega = 0$, allora il gestore ha un'elevata fiducia in questa view. Se, invece $\Omega \neq 0$, allora il gestore ha un grado di incertezza attorno alla medesima view.

Consideriamo una view relativa. Ipotizziamo che il titolo 1 sia sopravvalutato rispetto al titolo 2:

$$\mu_1 - \mu_2 = q + \epsilon \quad (104)$$

ciò vuol dire che la matrice P uguale al vettore riga $(1, -1)$ e il gestore ritiene che il rendimento atteso del titolo 1 sia pari a q .

Se il Gestore ha 2 views, la matrice P ha 2 righe. Dato k il numero delle views, e P avrà un numero di righe pari a k .

Pregi e difetti dei modelli bayesiani

Pregi:

- Riduzione dell'instabilità dell'allocazione di portafoglio.
- Ruolo attivo dell'esperienza del gestore.
- Minore importanza al dato: riduzione dell'errore di stima.

Difetti:

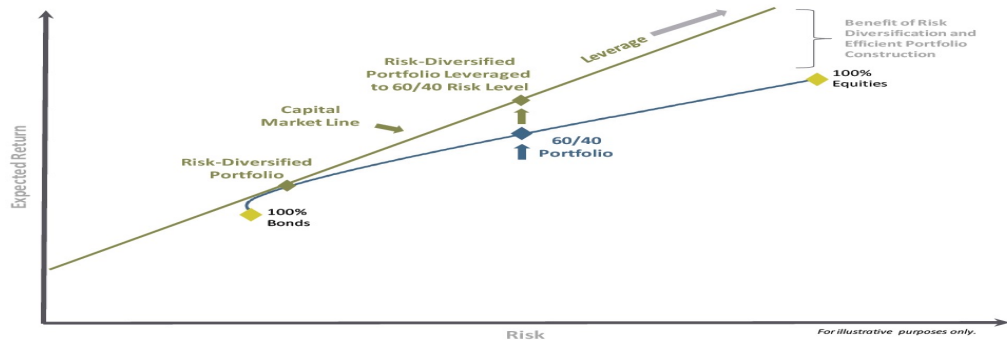
- Portafogli molto 'seduti': difficoltà nel catturare spike di mercato.
- Le views sono come vincoli: con una view su ogni titolo, quel titolo viene considerato nell'Asset Allocation.

Risk Parity

- Obiettivo: bilanciare il contributo al rischio rispetto al portafoglio totale da parte degli assets inseriti nell'asset allocation.
- Esempio: un portafoglio tradizionale investito in 60 per cento azioni e 40 per cento bonds risulta in 90 per cento del rischio concentrato in azioni.
- Risk Parity cerca di evitare questa concentrazione del rischio, costruendo un portafoglio più bilanciato.
- Tale metodologia permette di ottenere un rendimento più elevato, mantenendo sotto controllo il rischio in modo più accurato.
- Leverage può essere uno strumento importante per raggiungere i target di redditività, senza rinunciare alla logica della diversificazione sia del rischio che delle quantità di titoli(muoversi verso la parte alta della CML)
- La selezione dei titoli e delle asset class da includere nel portafoglio deve seguire solo la logica della diversificazione del rischio.
- Titolo con egual rischio devono essere inseriti solo quando è possibile diversificare il rischio totale.

- La Risk Parity sposta l'enfasi dalla logica di allocazione del capitale a quella di allocazione del rischio.
- Attraverso una logica di equalizzazione o di allocazione del contributo al rischio è possibile raggiungere un livello molto più elevato dello Sharpe Ratio, rispetto agli approcci tradizionali.
- In pratica il problema di ottimizzazione è il medesimo della teoria classica di portafoglio: viene solo aggiunto un vincolo in più, dato dall'eguaglianza del contributo al rischio da parte di ogni titolo.
- In ogni caso: il gestore non deve acquistare e/o vendere sulla base di giudizi sull'andamento futuro del rendimento, ma solo sulla base del comportamento del rischio, con la finalità di mantenere l'esposizione costante su ogni asset class.

Esempio



Esempio

3 titoli con varianza, rispettivamente del: $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 20\%$, $\sigma_3 = 15\%$. Correlazioni: $\rho_{1,2} = 80\%$, $\rho_{2,3} = 30\%$, $\rho_{1,3} = 50\%$. Allocazione iniziale: $x_1 = 50\%$, $x_2 = 20\%$, $x_3 = 30\%$. Nell'Equal Risk Contribution (ERC): identico contributo al rischio.

Weight budgeting (or traditional) approach

Asset	Weight	Marginal Risk	Risk Contribution	
			Absolute	Relative
1	50.00%	29.40%	14.70%	70.43%
2	20.00%	16.63%	3.33%	15.93%
3	30.00%	9.49%	2.85%	13.64%
Volatility			20.87%	

Risk budgeting approach

Asset	Weight	Marginal Risk	Risk Contribution	
			Absolute	Relative
1	31.15%	28.08%	8.74%	50.00%
2	21.90%	15.97%	3.50%	20.00%
3	46.96%	11.17%	5.25%	30.00%
Volatility			17.49%	

ERC approach

Asset	Weight	Marginal Risk	Risk Contribution	
			Absolute	Relative
1	19.69%	27.31%	5.38%	33.33%
2	32.44%	16.57%	5.38%	33.33%
3	47.87%	11.23%	5.38%	33.33%
Volatility			16.13%	